TRATTATO ELEMENTARE

D' ALGEBRA.

TRATTATO ELEMENTARE
D' ALGEBRA

CONFORME AI PROGRAMMI UFFICIALI

PER LE SCUOLE

SECONDARIE CLASSICHE E TECNICHE

CORREDATO

di Esercizi graduati e Problemi colla rispettiva soluzione

COMPILATO DA

CESARE PAGNINI

Prof. di Matematica nelle R. Scuole Ginnasiali e Tecniche di Pistoja

---

Seconda Edizione

CORRETTA E NOTEVOLMENTE AMPLIATA.

Libro premiato con MEDAGLIA D'ARGENTO

nella Quarta Esposizione didattica dall'Ottavo Congresso pedagogico in Venezia

---

MILANO

V. MAISNER E COMPAGNIA EDITORI

Via Monte di Pietà N. 20.

Ottobre 1875.

Al Lettore

Nel pubblicare nuovamente questo ***Trattato***, curai sopra tutto che le materie indicate dai programmi governativi fossero disposte in quell'ordine logico che è pregio essenziale d'un libro scolastico, e che la esposizione non fosse nè oscura, nè barbara. Dal quale secondo pregio, rarissimo oggi, parmi non essere andato lontano; poichè mentre ho studiato di raggiungere il sommo requisito del linguaggio scientifico, la precisione, ho fuggito peraltro gli eccessi di un tecnicismo orgoglioso che imbarbarisce e confonde.

Ammaestrato poi dall'esperienza che le teoriche riescono spesso infruttuose senza la pratica, le illustrai con iscelti e graduati

esercizi posti sotto la forma di uguaglianze, sì che l'alunno possa per sè rilevare se sia riuscito nell'esercizio che imprese a sviluppare.

Aggiunsi ancora buon numero di problemi, parte dei quali applicati alla Geometrìa, e a ciascun problema feci seguire la rispettiva risposta, per allettare lo studioso e risparmiare noia e fatica al Professore.

Se alcuni errori tipografici si riscontreranno in questa ristampa, prego il Lettore a riflettere che in opere di questo genere è impossibile evitarli tutti.

Settembre 1873.

C. Pagnini.

Errori.	Correzioni.
Pagina 16, linea 17:	
$a + b + 2x + y.$	$a + 3b + 4x + y.$
Pagina 22, linea 1:	
polimonio	polinomio.
Pagina 22, linea 7:	
$-14x6$	$-14x^6$
Pagina 24, linea 11:	
alla destra	alla sinistra
Pagina 69, linea 2 da basso:	
$2(a + c)c$	$2(a + b)c$
Pagina 72, linea 3 da basso:	
$(a + b^4)$	$(a + b)^4$
Pagina 73, linea 3:	
$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + {}^4.$	$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$
Pagina 91, linea ultima:	
$\sqrt[6\cdot 3]{3a^{2\cdot 2}b^2};$	$\sqrt[6\cdot 2]{3^2a^{2\cdot 2}b^2};$
Pagina 93, linea 12:	
$-2(2a^2b - abc + 2)$	$-2(2a^2b - abc + 3)$
Pagina 94, linea 3 da basso:	
$\sqrt{a} \times \sqrt[3]{b} \times$	$\sqrt{a} \times \sqrt[3]{b} =$
Pagina 94, linea 2 da basso:	
$\sqrt{2a^3b^2}$	$\sqrt[5]{2a^3b^2}$
Pagina 179, linea 18:	
$9x$	$9x^2$
Pagina 188, linea 5:	
$= 3x(x = 4),$	$= 3x(x - 4),$

Definizioni e spiegazione dei Segni

---

1. L'*Algebra* è quella parte delle Matematiche che insegna ad abbreviare e generalizzare le operazioni che si fanno sopra i numeri, senza aver riguardo alle diverse specie di grandezze che essi rappresentano.

2. L'Aritmetica differisce dall'Algebra in quanto che in essa si combinano fra loro per mezzo di certe regole le grandezze numeriche rappresentate da segni che hanno un determinato valore, onde avere un resultato che non lascia alcuna traccia delle operazioni per le quali si è ottenuto, mentre in Algebra le quantità si rappresentano con lettere, e non si ha in mira d' ottenere un resultato numerico, ma la maniera con cui ciascuna quantità entra nel calcolo. L'Aritmetica non si estende che ad alcuni metodi di calcolare, i quali vengono a bisogno nella vita civile, mentre l'Algebra abbraccia tutto ciò che può aver luogo nella dottrina dei numeri, onde da Newton fu chiamata *Aritmetica universale*.

3. Da questo confronto è facile riconoscere che i principali vantaggi che l'Algebra ha sull'Aritmetica sono:

1.° Di conoscere in modo generico e completo quanto l'Aritmetica dimostra solo per casi particolari;

2.° Di trovare prontamente resultati, che rare volte coll'Aritmetica si ottengono, senza lunghe ed incerte operazioni;

3.° Di esprimere con singolare laconismo questi stessi resultati, che l'Aritmetica può solamente indicare con lunghe frasi;

4.° Di risolvere un infinito numero di problemi, che l'Aritmetica non potrebbe;

5.° Di offrire all'Aritmetica stessa nelle operazioni più complicate molti metodi per renderle assai più spedite ed agevoli.

4. I segni che si usano in Algebra sono i seguenti:

$(=)$	che significa	*uguale a;*
$(+)$	»	*più;*
$(-)$	»	*meno;*
$(\times)$ o $(\cdot)$	»	*moltiplicato per;* (1)
$(:)$	»	*diviso per;*
$(>)$	»	*maggiore di;*
$(<)$	»	*minore di;*
$(\sqrt{})$	»	*radice di;* (2).

(1) Quando le quantità sono rappresentate da lettere, nella moltiplicazione non si fa uso di segno; così per indicare la moltiplicazione delle quantità espresse da a e da b, si scrive ab; e similmente, l'espressione abc indica il prodotto di a per b e per c. (Vedi l'*Aritmetica* dello stesso autore, sesta edizione pag. 64)

(2) Questo è detto *segno radicale* o semplicemente *radicale* e pronunciasi *radice quadrata di*, *radice terza di*, *radice quarta di*, ecc., secondochè nella sua apertura verticale non ha numero, od ha il 3, il 4, ecc. Questo numero chiamasi *indice del radicale*.

5. *Coefficiente*, è un numero che precede una quantità letterale, ed indica quante volte essa dev' essere ripetuta.

Così:

$7a$ indica $7 \times a$; $8a+3b$ significa $8 \times a + 3 \times b$.

Più generalmente, qualunque *moltiplicatore* di una quantità è un coefficiente di questa quantità.

Esempi: $\frac{2}{3}x$; $0,036x^2$; $(a+p)x$.

In queste espressioni i numeri $\frac{2}{3}$; $0,036$; $a+p$, sono coefficienti, perchè esse equivalgono a

$$x \times \frac{2}{3}; \quad x^2 \times 0,036; \quad x \times (a+p).$$

Si noti che si sottintende il coefficiente 1 ad ogni quantità priva di coefficiente; così a è lo stesso che $1a$.

6. Chiamasi *esponente* un numero scritto alla destra e un poco al disopra di una quantità per indicare quante volte essa deve essere presa come *fattore*. — Un prodotto di fattori uguali si chiama *potenza*. — L' esponente indica il grado della potenza.

Così: a^2 o aa rappresenta la *seconda potenza* od il *quadrato* di a; per abbreviazione si lègge *a due*.

a^3 o aaa denota la *terza potenza* o il *cubo* di a, e leggesi *a tre*, ecc.

Si osservi che sottintendesi l' esponente 1 ad ogni quantità priva di esponente; così a è lo stesso che a^1.

Non si confonda il coefficiente coll' esponente, cioè il *doppio* col *quadrato*, il *triplo* col *cubo*, ecc.

Così: $3a = a+a+a$; e $a^3 = a \times a \times a$.

7. *Espressione algebrica* è qualunque quantità scritta in *linguaggio algebrico*, vale a dire espressa coi segni abbreviativi dell'Algebra.

Così l'espressione $\frac{3a+b-c}{m}$ indica che

a tre volte la quantità rappresentata da a *deve aggiungersi la quantità espressa da* b, *togliere dal resultato la quantità indicata da* c, *e dividere ciò che rimane per la quantità espressa da* m.

8. *Termine algebrico* è una espressione formata da una o più lettere senza l'interposizione del segno $+$ o del segno $-$.

Esempi: ab; $\frac{a^2bc^3}{d}$; $\sqrt{a^4b^2}$.

9. Un'espressione algebrica è detta *monomio*, quando ha un solo termine; *binomio*, se ne ha due; *trinomio*, se ne ha tre; *polinomio*, se ne ha un numero qualunque.

Così le espressioni $5a^2b^3c$, $\frac{a\,b}{c}$, $\sqrt{a^2+b^2}$ sono monomi. Le espressioni $3a-5ab$, $a+4\sqrt{a\,b}$ sono binomi. Le espressioni $a^2-2ab+b^2$, $2a+3\sqrt{a\,b}-5b$, sono trinomi. L'espressione $a^4-3a^2b+5a^2b^2-7ab^3-2b^4$ è un polinomio.

10. Un' espressione algebrica che non contiene il segno $\sqrt{}$ è detta *razionale;* per opposizione è chiamata *irrazionale* se lo contiene.

L'espressione $\frac{4a^2-3b^2}{a+b}$ è razionale; e l'espressione $a+\sqrt{a\,b}$ è irrazionale.

11. Un'espressione razionale è *intera*, se non ha segno di divisione; nel caso contrario è *frazionaria*.

L'espressione $a^2-2ab+b^2$ è un polinomio intero; l'espressione $a+\frac{a^2-b^2}{2c}-4b$ è un polinomio frazionario.

12. Un polinomio indica una serie di addizioni e sottrazioni da eseguirsi.

Così l'espressione $a+b-c+d-e-f$ è un polinomio, nel quale le quantità affètte dal segno $+$ diconsi *additive* o *positive*, e quelle precedute dal segno $-$ diconsi *sottrattive* o *negative*. I termini privi di segno, come il primo, si suppongono affètti dal segno $+$.

13. In un polinomio si può sempre cambiare a piacere l'ordine de' termini, perchè qualunque sia l'ordine di essi, si ha sempre la stessa somma da aggiungere e la stessa somma da sottrarre.

Così il polinomio

$a+b-c+d-e-f$ può scriversi $a+b+d-c-e-f$.

14. *Termini simili* si dicono quelli formati dalle stesse lettere affètte dagli stessi esponenti, e che non differiscono che nei coefficienti e nei segni.

Così nel polinomio

$$5a^3-4a^2b+7ab^2+a^2b-2a^3-8ab^2+a^3-12ab^2+3a^2b$$

i termini simili sono $5a^3-2a^3+a^3$,

che possono essere sostituiti dal solo termine $+4a^3$;

e $+7ab^2-8ab^2-12ab^2$,

i quali si riducono a $-13ab^2$.

Quindi il polinomio proposto può scriversi più semplicemente così: $4a^3-13ab^2$.

Questa semplificazione chiamasi *riduzione dei termini simili*.

15. Regola: *Per fare la riduzione dei termini simili non si opera che sopra i coefficienti; si forma un solo termine positivo coi termini simili affètti dal segno $+$, e un solo termine negativo coi termini simili affètti dal segno $-$; si toglie poi il coefficiente minore dal maggiore, dando al resultato il segno del maggiore.*

Esempio. Sia il polinomio

$$3a^4-5a^3b+7a^2b^2+4ab^3-b^4+2a^4-3a^3b$$
$$+8a^2b^2-7ab^3+2b^4.$$

Ravvicinando fra loro i termini simili, il che può sempre farsi (n.° 13) si ha:

$$3a^4+2a^4-5a^3b-3a^3b+7a^3b^2+8a^3b^2$$
$$+4ab^3-7ab^3-b^4+2b^4;$$

ora, $3a^4+2a^4=5a^4$; $-5a^3b-3a^3b=-8a^3b$;
$7a^3b^2+8a^3b^2=15a^3b^2$; $4ab^3-7ab^3=-3ab^3$;
$-b^4+2b^4=b^4$;

dunque il polinomio proposto si riduce a

$$5a^4-8a^3b+15a^3b^2-3ab^3+b^4.$$

16. *Ordinare un polinomio per le potenze di una medesima lettera,* significa scrivere i suoi termini in un ordine tale, che gli esponenti di questa lettera vadano aumentando o diminuendo.

Così il polinomio

$$5x^3-4x^2+3x-6$$

è ordinato per le potenze decrescenti d'x; e scritto in ordine inverso,

$$-6+3x-4x^2+5x^3,$$

è ordinato per le potenze crescenti della stessa lettera.

Altro esempio. Debbasi ordinare per le potenze decrescenti della lettera a il polinomio

$$3a^2-2ab+a^4-5a^3b^2-7a^5+a^6.$$

Avremo: $a^6-7a^5+a^4-5a^3b^2+3a^2-2ab.$

17. *Formula algebrica* è il resultato generale d'un calcolo algebrico, applicabile a tutti i casi simili. Finchè alle lettere non si sostituiscono le quantità numeriche che esse rappresentano, una formula non ha alcun significato; ma determinando il valore di esse, la formula si riduce sempre ad un numero.

Esempio. Sappiamo (vedi Aritmetica) che *il quadrato della somma di due numeri è uguale al quadrato del primo, più due volte il prodotto del primo pel secondo, più il quadrato del secondo.*

Rappresentando con a e b i due numeri, l'enunciato di questo teorema si cambia nella formula

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

nella quale le due lettere a e b possono essere sostituite da due numeri qualunque. Facendo ad esempio:

$$a=8 \quad \text{e} \quad b=4,$$

si ha:

$$(8+4)^2=8^2+2\times8\times4+4^2=64+64+16=144;$$

e così la formola è ridotta ad un numero.

Abbiasi la formula $\dfrac{3a^2-b^3+c}{m}$; facciamo

$$a=10;\ b=2;\ c=20;\ m=8;$$

la formula si trasforma nell'espressione

$$\frac{3\times10^2-2^3+20}{8}=\frac{3\times100-8+20}{8}$$

$$=\frac{300-8+20}{8}=\frac{312}{8}=39.$$

ESERCIZI.

I. Rappresentare con segni algebrici le tre espressioni seguenti:

Il triplo d'un numero incognito, diminuito di $^1/_3$ di esso, uguaglia lo stesso numero incognito, aumentato di 19.

Soluzione. Rappresentando con x il numero incognito, avremo: $\quad 3x-{}^1/_3x=x+19;$

ovvero: $\quad 3x-\dfrac{x}{3}=x+19.$

I $^3/_5$ d'un numero, aumentati di 15, uguagliano lo stesso numero, diviso per 3.

A cinque volte il prodotto del quadrato di una quantità per un' altra aggiungere due volte il prodotto della prima per la terza potenza della seconda.

II. Ridurre i termini simili nei seguenti polinomi:

$$6a+a+3b+5c-b+3c-2a.$$

$$5a^2+3ab-2b^2-ab+9b^2-2ab-7b^2.$$

$$a^3-3a^2b+3a^2b-b^3+2a^3+5a^2b-6ab^2-7b^2-a^3-ab^2.$$

$$5a^2b-3ax^3+18a^2b+5ax^3-9a^2b-ax^3-a^2b.$$

$$3a^2b-4b^3c+7a^2b+6b^3c-a^2b-5a^2b-3b^3c-b^3c.$$

$$5a^2+4b-3c-7d-8+8a^2-12b+7c-10d+4.$$

$$\frac{5a^3}{b^4}-\frac{7b^3}{b^4}+\frac{11a^3}{b^4}+a^4+\frac{a^3}{b^4}-\frac{b^3}{b^4}-a^4-\frac{2a^3}{b^4}.$$

III. Ordinare i seguenti polinomi per le potenze decrescenti della lettera x:

$$1+2x-3x^2+x^4-x^3.$$

$$x^4+2xy+4x^2y^2+8x^3y^3-x^2y.$$

$$3x^2-bx+4x^5-3x^3+x^4-bx^3.$$

$$mx+mx^3-x^2+7x^6-x^5+mx^8-x^4+x^7.$$

$$4x^2+3xy-2x+4x^3y+2x^2-7x^4y+x^5.$$

IV. Trovare il valore d' x nella formula

$$x=\frac{8c^2-5+5b}{a}, \text{ facendo } c=4,\ b=10;\ a=2.$$

Resultato: $x=76+\frac{1}{2}.$

V. Dedurre il valore d' x dall' espressione

$$x=\frac{4a^3+b^2-c}{a-b}, \text{ facendo } a=9;\ b=8;\ c=20.$$

Resultato: $x=2960.$

VI. Trovare il valore numerico della formula $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, supposto $a=180$, e $b=9$.

Resultato: 6751269.

VII. Calcolare il valore numerico dell' espressione $x=2(a+b+c)d+d^2$, ponendo $a=80$; $b=25$; $c=8$; $d=4$.

Resultato : $x=920$.

VIII. Verificare le seguenti uguaglianze, nell' ipotesi di $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=4$, $e=5$, $f=o$:

$$e^3-d^3+c^3-b^3+a^3=81.$$

$$abc^2+bcd^2-dea^2+f^3=94.$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=27.$$

$$\frac{a^2+b^2}{e}+\frac{c^2+e^2}{b}+\frac{e^2-d^2}{c}=21.$$

IX. Fatto $a=1$, $b=2$, $c=3$, $d=5$, $e=8$, verificare :

$$\sqrt{2b+4c}=4. \qquad \sqrt[3]{4c-2b}=2.$$

$$e\sqrt{2b+4c}-(2d-b)\sqrt[3]{4c-2b}=16.$$

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2}\times\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=9.$$

$$\sqrt[3]{c^3-3c^2a+3ca^2-a^3}:\sqrt{b^2+c^2-2bc}=2.$$

X. Tradurre in formule i tre Teoremi seguenti :

La somma di due o più numeri è la stessa, qualunque sia l'ordine degli addendi.

Si ottiene il prodotto di una somma per una somma, moltiplicando ciascuna parte della prima per ciascuna parte della seconda, e sommando i resultati.

Per moltiplicare due potenze di uno stesso numero, basta sommare gli esponenti.

Operazioni sulle quantità intere.

ADDIZIONE

18. Regola: *Per aggiungere un polinomio ad un altro polinomio, basta aggiungergli i termini positivi, e togliere i negativi dal resultato;* o in altre parole: *per fare la somma di due o più polinomi si scrivono di seguito l'uno all'altro coi rispettivi segni, e poi si fa la riduzione dei termini simili* (n°. 15.)

Così, se ad un polinomio qualunque, che rappresenteremo colla lettera P, si deve aggiungere il polinomio

$$a+b-c+d+e-f.$$

il resultato sarà

$$P+a+b+d+e-c-f.$$

Infatti, il polinomio dato può scriversi così (n.° 13):

$$a+b+d+e-c-f;$$

onde

$$P+(a+b-c+d+e-f)=P+a+b+d+e-c-f.$$

Debbansi ora sommare i tre polinomi

$$(3a+5b^2+4ab),\ (2a-b^2+3cd),\ (4a+3ab-c^3).$$

Secondo la regola enunciata, avremo:

$$3a+5b^2+4ab+2a-b^2+3cd+4a+3ab-c^3;$$

ovvero

$$3a+2a+4a+5b^2-b^2+4ab+3ab+3cd-c^3,$$

cioè (n.° 15)

$$9a+4b^2+7ab+3cd-c^3,$$

che è la somma richiesta.

E si ha l'uguaglianza:

$$(3a+5b^2+4ab)+(2a-b^2+3cd)+(4a+3ab-c^3)$$
$$=3a+5b^2+4ab+2a-b^2+3cd+4a+3ab-c^3$$
$$=3a+2a+4a+5b^2-b^2+4ab+3ab+3cd-c^3$$
$$=9a+4b^2+7ab+3cd-c^3.$$

L' operazione in pratica può disporsi scrivendo i polinomi dati uno sotto all' altro in modo che i termini simili si corrispondano, e poi facendone la riduzione.

Esempio. Siano i polinomi $(8a+b)$; $(2a-b+c)$; $(-3a+5b+2d)$; $(-6b-3c+3d)$; $(-5a+7c-2d)$.

Operazione.

$$\begin{array}{rrrr}
8a & +b & & \\
2a & -b & +c & \\
-3a & +5b & & +2d \\
 & -6b & -3c & +3d \\
-5a & & +7c & -2d \\
\hline
2a & -b & +5c & +3d
\end{array}$$

Somma: $2a-b+5c+3d$

E si ha l' uguaglianza:

$$(8a+b)+(2a-b+c)+(-3a+5b+2d)$$
$$+(-6b-3c+3d)$$
$$+(-5a+7c-2d)=8a+b+2a-b+c-3a+5b+2d$$
$$-6b-3c+3d=8a+2a-3a-5a+b-b+5b-6b$$
$$+c-3c+7c+2d+3d-2d=2a-b+5c+3d.$$

Da questi esempi è facile riconoscere che l'Addizione algebrica non è altro che una riduzione di termini simili; e che si possono togliere le parentesi ai polinomi da sommarsi lasciando i rispettivi segni ai termini di essi.

ESERCIZI.

XI. Verificare le seguenti uguaglianze:

$$(6a^2b-5a^3b^5+7ab^2)+(12a^3b^5+5ab-4a^2b)$$
$$=2a^2b+7a^3b^5+7ab^2+5ab.$$

$$(10a^5b^4-3a+5ab^2)+(-7a^2b^4+5ab-2a^5b^4)$$
$$+(8a-6a^2b^4+15ab^2-11ab)$$
$$=8a^5b^4+5a+20ab^2-13a^2b^4-6ab.$$

$$(4a+5b-7c+3d)+(3a-b+2c+5d)$$
$$+(9a-2b-c-d)+(-a+3b+4c-3d+e)$$
$$=15a+5b-2c+4d+e.$$

$$(x^3+2x^2-3x+1)+(4x^3+7x^2+x-9)$$
$$+(-2x^3+x^2-9x+8)+(-3x^3-x^2+10x-1)$$
$$=9x^2-x-1.$$

$$(a^2+ab+b^2-c)+(3a^2-3ab-7b^2)$$
$$+(4a^2+5ab+9b^2)+(a^2-3ab-3b^2)=9a^2-c.$$

$$(7x^2-3xy+x)+(3x^2-y^2+3x-y)$$
$$+(-2x^2+4xy+5y^2-x-2y)+(-7xy-y^2+9x-5y)$$
$$+(4x^2+4y^2-2x)=12x^2-6xy+7y^2+10x-8y.$$

XII. Aggiungere il polinomio $7ab^4-5a^2b^2-4a^4b^3$ al polinomio $3a^2b^2-4ab^4+5ab+a^4b^3$, e la somma ridotta si converta in numero, facendo $b=4$, $a=5$.

Resultato: -116860.

SOTTRAZIONE

19. Regola: *Per togliere da un polinomio un altro polinomio, basta aggiungergli i termini negativi e togliere i positivi dal risultato*; od in altre parole: *per fare la sottrazione fra due polinomi, basta scrivere di seguito ai termini del polinomio* diminuendo, *successivamente tutti i termini del polinomio* diminutore *coi segni contrari.*

Così, se da un polinomio qualunque P si deve togliere il polinomio $a+b-c+d-e$, il risultato sarà

$$P+c+e-a-b-d,$$

o, ciò che è lo stesso (n.° 15),

$$P-a-b+c-d+e.$$

Infatti, il polinomio dato può scriversi

$$a+b+d-c-e.$$

Ora, è chiaro che se dal polinomio P si toglie prima a, poi b, poi d, il risultato sarà

$$P-a-b-d.$$

Ma questo resultato è minore del vero delle quantità c ed e, perchè dal polinomio P non si doveva togliere $a+b+d$, ma le quantità $a+b+d$ diminuite prima di c e di e; per aver dunque il vero resultato, bisogna correggere l'errore aggiungendogli le quantità c ed e, e così si ottiene

$$P-a-b-d+c+e,$$

ovvero

$$P-a-b+c-d+e,$$

come bisognava dimostrare.

Ricordando che in una Sottrazione il diminuendo è uguale alla somma del diminutore colla differenza, il resultato sopra trovato, se è il vero, dev'essere tale che, sommato col polinomio diminutore, riproduca il polinomio diminuendo; come infatti si verifica, perchè si ha l'uguaglianza

$$P=(a+b-c+d-e)+(P+c+e-a-b-d),$$

ovvero

$$P=P,$$

perchè i termini

$$+a-a,\ +b-b,\ -c+c,\ +d-d,\ -e+e$$

si distruggono.

20. In pratica, come nell'Addizione, può scriversi

sotto al polinomio diminuendo il polinomio diminutore in modo che i termini simili si corrispondano, cambiando in quest' ultimo il segno a ciascun termine e facendo poi la riduzione dei termini simili.

Esempio: Dal polinomio $5a^3-4a^2b-6ab^2+b^3$ debbasi togliere il polinomio $a^3-7a^2b+2ab^2-5b^3$.

Operazione.

$$\begin{array}{lr} & 5a^3-4a^2b-6ab^2+\ b^3 \\ & -\ a^3+7a^2b-2ab^2+5b^3 \\ \hline \text{Resto:} & 4a^3+3a^2b-8ab^2+6b^3 \end{array}$$

E si ha l'uguaglianza:

$$(5a^3-4a^2b-6ab^2+b^3)-(a^3-7a^2b+2ab^2-5b^3)$$
$$=5a^3-4a^2b-6ab^2+b^3-a^3+7a^2b-2ab^2+5b^3$$
$$=5a^3-a^3-4a^2b+7a^2b-6ab^2-2ab+b^3+5b^3$$
$$=4a^3+3a^2b-8ab+6b^3.$$

Da questo esempio si deduce che volendo togliere la parentesi da un polinomio che avanti alla parentesi stessa ha il segno —, bisogna cambiare il segno a ciascun termine del polinomio. Così:

$$-(4a^2-6ab+11b^2)=-4a^2+6ab-11b^2.$$
$$-(-3a^3+2a^2b-8a)=\ 3a^3-2a^2b+8a.$$

Chiamando *negative* le quantità affètte dal segno —, tutti i termini d' un polinomio possono riguardarsi come *aggiunti* gli uni agli altri.

Per questa convenzione *aggiungere una quantità negativa* significa *toglierla;* così: aggiungere ad a la quantità $-b$ significa *togliere* b da a, e si ha:

$$a+(-b)=a-b\,;$$

e *togliere una quantità negativa* significa *aggiungerla;* così: togliere da a la quantità $-b$ significa aggiungere b ad a, e si ha $a\div(-b)=a+b$.

21. La Sottrazione genera i numeri negativi. Infatti, supponiamo che da 4 si debba togliere 10. Poichè 10 è lo stesso che $4+6$, basterà togliere da 10 successivamente 4 e 6, e il resultato sarà

$$4-4-6=-6.$$

Parimente:

$$8ab-13ab=8ab-8ab-5ab=-5ab.$$

Da quanto precede è facile rilevare che nell'Algebra le parole *Addizione* e *Sottrazione* non si usano in un significato perfettamente identico a quello che hanno in Aritmetica. In quest'ultima scienza l'Addizione genera sempre un aumento e la Sottrazione una diminuzione; ma nell'Algebra si può parlare di aggiungere -3 a 5 e la *somma algebrica* che si ottiene è 2; o anche si parla di dover sottrarre -3 da 5 e la *differenza algebrica* è 8.

ESERCIZI.

XIII. Verificare le seguenti uguaglianze:

$$(3x^4+5x^3-6x^2-7x+5)-(2x^4+2x^3-5x^2+6x+7)$$
$$=x^4+7x^3-11x^2-x+12.$$

$$(6a^2b-5a+9a^76^3)-(8a-2a^2b+7ab-a^7b^3)$$
$$=8a^2b-13a+10a^7b^3-7ab.$$

$$(5a^4b+3a^2b^2c-7ab)+(-6a^4b+2a^2b^2c+17ab)$$
$$-(9a^4b-8a^2b^2c-10ab)=-10a^4b+13a^2b^2c+20ab.$$

$$(7x^3-2x^2+2x+2)-(4x^3-2x^2-2x-14)$$
$$-2x^3-8x^2+4x+16)=x^3+8x^2.$$

$$a+b-(2a-3b)-(5a+7b)-(-15a+2b)=9a-5b.$$

$$37a-5f-(3a-2b-5c)-(-6a-4b+5h)$$
$$=40a+6b-5f+5c-3h.$$

XIV. Dal binomio $8ab+5a^7c^2$ si tolga il trinomio $5a^7c^2-2a-4ab$, e il resto ridotto si converta in numero, facendo $a=10$, $b=8$, $c=2$.

Resultato : 80000980.

XV. Al binomio $y+\frac{1}{2}z-\frac{1}{5}x$ si aggiunga il polinomio $z+\frac{1}{2}x-\frac{1}{5}y+x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{3}z$, e dal resultato si tolga il trinomio $\frac{1}{6}x-y-\frac{1}{5}z$.

Resultato : $x+\frac{13y}{6}+\frac{5z}{2}$.

XVI. Trovare la somma e la differenza di

$$5x^2-4xy+4y^2 \quad \text{e} \quad 4x^2+2xy-5y^2.$$

Resultato :

Somma $= 7x^2-2xy+y^2$;
Differenza $=-x^2-6xy+7y^2$.

XVII. Sommare $a+2x-y+24b$ con $5a-4x-2y-81b$ con $x+y-2a+55b$; e sottrarre il resultato da $3a+b+3x+2y$.

Resultato : $a+3b+2x+y$. $a+3b+4x+y$

MOLTIPLICAZIONE

22. Nella Moltiplicazione algebrica bisogna osservare le quattro regole seguenti :

I. **La regola dei segni**, la quale consiste nel dare al prodotto il segno $+$, quando i due fattori hanno segno eguale, e il segno $-$, quando sono affètti da segno differente.

Così: 1.ª $+a\times+b=+ab$,
2.ª $+a\times-b=-ab$,
3.ª $-a\times+b=-ab$,
4.ª $-a\times-b=+ab$.

Infatti:

1.ª $+a\times+b=+ab$. Evidente come in Aritmetica; perchè dire, per esempio, $5\times3=15$, è lo stesso che dire $+5\times+3=+15$.

2.ª $+a\times-b=-ab$. Infatti, supponiamo che debbasi moltiplicare a per $(b-b)$; il prodotto si comporrà di due parti, cioè di a per b e di a per $-b$. Ma $b-b=o$, dunque anche $a\times(b-b)=o$; per conseguenza le due parti che compongono questo prodotto debbono distruggersi, il che non può avvenire se esse non sono uguali e di segno contrario. Ora la prima parte è $+a\times b=ab$; dunque la seconda deve essere *necessariamente* $+a\times-b=-ab$.

3.ª $-a\times+b=-ab$. La dimostrazione è identica alla precedente, supponendo che debbasi moltiplicare $(a-a)$ per b.

4.ª $-a\times-b=+ab$. Infatti, se si dovesse moltiplicare $-a$ per $(b-b)$, il prodotto sarebbe *zero*, perchè $b-b=o$. Ma il prodotto $-a\times(b-b)$ si compone di due parti, cioè di $-a\times b=-ab$ e di $-a\times-b$; ora, affinchè questo secondo prodotto annulli il primo è *necessario* che sia $-a\times-b=+ab$.

E così è dimostrata la regola così detta *dei segni* (1).

II. **La regola delle lettere**, che consiste nello scrivere le lettere del moltiplicando e del moltiplicatore senza interposizione di segno.

Così: $a\times b=ab$; $ab\times cde=abcde$.

(1) Vedasi la nota alla fine di questa teoria.

III. **La regola dei coefficienti**, che consiste nel moltiplicarli fra loro.

Così: $5a \times 3b = 15ab$.

Infatti, $5a \times 3b = (5.a)(3.b) = 5.a.3.b =$
$5.3.a.b = 15ab$.

IV. **La regola degli esponenti,** la quale consiste nel sommare gli esponenti delle lettere uguali.

Così: $a^4b^3 \times a^3b = a^7b^4$.

Infatti, $a^4b^3 \times a^3b = aaaabbbaaab$,

ovvero $a^4b^3 \times a^3b = aaaaaaabbbb = a^7b^4$.

Moltiplicazione dei monomi.

23. Regola: *Per fare il prodotto di due o più monomi interi si moltiplicano i coefficienti, si sommano gli esponenti delle lettere uguali, e si scrivono di seguito l' una all' altra le lettere differenti coi loro esponenti.*

Così: $5a^3b^2c \times 4a^2b^4c^3d = (4a^2b^4c^3d) \times (5a^3b^2c)$
$= 4a^2b^4c^3d \times 5a^3b^2c = 4 \times 5 \times a^2 \times a^3 \times b^4 \times b^2 \times c^3 \times c \times d$
$= 20a^5b^6c^4d$.

Si troverà nello stesso modo che

$$4a^3b^2c^4d \times 3a^2bc^3e^4 = 12a^5b^3c^7de^4;$$
$$-3a^3bc^2d^4 \times 6ab^2ce = -18a^4b^3c^3d^4e;$$
$$-2mn^3p \times -4np^2q = 8mn^4p^3q.$$

Moltiplicazione d'un polinomio per un monomio.

24. Regola: *Si fa il prodotto di un polinomio per un monomio qualunque, moltiplicando separatamente ciascun termine del polinomio per questo monomio, e dando ad ogni*

termine del prodotto il segno + o il segno —, secondochè i due termini sono affètti da segno uguale o da segno contrario.

Esempio. Debbasi moltiplicare il polinomio

$$a-b+c-d$$

per un monomio qualunque m.

È evidente che bisogna ripetere il polinomio dato m volte e sommare i resultati.

Onde avremo:

$$(a-b+c-d)m=am-bm+cm-dm.$$

Per maggior chiarezza facciamo $m=4$. Moltiplicare una quantità per 4 significa ripeterla 4 volte; così per avere il prodotto del polinomio $a-b+c-d$ per 4, potremo scrivere

$$\begin{array}{l} a-b+c-d \\ a-b+c-d \\ a-b+c-d \\ a-b+c-d \\ \hline \end{array}$$

Totale: $4a-4b+4c-4d$

Sostituendo a 4 il numero qualunque m, si ha: $ma-mb+mc-md$, ovvero $+am-bm+cm-dm$, come sopra.

Altri esempi:

$$(2a^2+3b-c^2)3a^3=6a^5+9a^3b-3a^3c^2;$$

$$(4a-b+3c)\times(-n)=-4an+bn-3cn;$$

$$(-2x^3+4y^2-z)\times(-2x)=4x^4-8xy^2+2xz.$$

Moltiplicazione di un polinomio per un polinomio.

25. Regola: *Per moltiplicare due polinomi fra loro si scrive il moltiplicatore sotto al moltiplicando: si moltiplicano successivamente tutti i termini del primo polinomio per ciascuno dei termini del secondo, e si scrivono i prodotti parziali ottenuti gli uni sotto agli altri. Finalmente se ne fa la somma, riducendo i termini simili.*

Esempio. Debbasi moltiplicare $(a-b)$ per $(c-d)$.

Operazione.

$$\begin{array}{lr} & a-b \\ & c-d \\ \hline 1.^{\circ} \text{ prodotto parziale} & ac-bc \\ 2.^{\circ} \text{ prodotto parziale} & -ad+bd \\ \hline \text{Prodotto totale} & ac-bc-ad+bd. \end{array}$$

Dunque $(a-b)(c-d)=ac-bc-ad+bd.$

Spiegazione.

È evidente che bisogna ripetere $(a-b)$ prima c volte, poi d volte e dal primo prodotto togliere il secondo. Ora, moltiplicando $(a-b)$ per c, si ha per prodotto (n.° 24) $ac-bc$; moltiplicando poi $(a-b)$ per d, si ha per prodotto $ad-bd$.

Onde il prodotto totale sarà $(ac-bc)-(ad-bd)$, ovvero (n.° 19) $ac-bc-ad+bd$.

26. Analizzando questo prodotto si vedrà che il primo termine ac nasce dai due termini positivi a e c; che

il secondo $-bc$ nasce da un termine negativo $-b$ e da un termine positivo c; che il terzo termine $-ad$ nasce da un termine positivo a e da un termine negativo $-d$; che il quarto $+bd$ nasce da due termini negativi $-b$ e $-d$.

Dunque: *i termini affètti da segno uguale dànno un prodotto* positivo, *e i termini affètti da segno contrario dànno un prodotto* negativo (n.° 22—1°).

Altro esempio. Sia da moltiplicarsi il polinomio $(a-b+c-d)$ pel polinomio $(e-f+g-h)$.

Operazione.

$$
\begin{array}{lll}
 & & a-b+c-d \\
 & & e-f+g-h \\
\hline
\text{Prodotto} & \text{per } e & ae-be+ce-de \\
\text{»} & \text{per} -f & -af+bf-cf+df \\
\text{»} & \text{per} +g & +ag-bg+cg-dg \\
\text{»} & \text{per} -h & -ah+bh-ch+dh \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{Prodotto} \\
\text{totale}
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
ae-be+ce-de-af+bf-cf+df \\
+ag-bg+cg-dg-ah+bh-ch+dh.
\end{array}
\right.
$$

Dunque:

$$(a-b+c-d)(e-f+g-h)=ae-be+ce-de$$
$$-af+bf-cf+df+ag-bg+cg-dg-ah+bh-ch+dh.$$

27. *Se le lettere contengono esponenti, si ordinano i due polinomi per le potenze decrescenti di una stessa lettera* (n. 16.°); *si moltiplicano tutti i termini del moltiplicando successivamente per ciascun termine del moltiplicatore, andando da sinistra a destra, e si scrivono i prodotti parziali in linee orizzontali in modo, che i termini simili si trovino uno sotto all' altro; poi si fa la riduzione, che una tale disposizione facilita assai.*

Esempio. Debbasi moltiplicare il polinomio
$$4x^5-3x^4-7x^3+x^2 \quad \text{per} \quad 2x^3-4x^2+5x.$$

Operazione.

$$
\begin{array}{l}
4x^5-3x^4-7x^3+x^2 \\
2x^3-4x^2+5x \\
\hline
8x^8-6x^7-14x^6+2x^5 \\
\quad\quad -16x^7+12x^6+28x^5-4x^4 \\
\quad\quad\quad\quad +20x^6-15x^5-35x^4+5x^3 \\
\hline
\end{array}
$$

Prodotto: $8x^8-22x^7+18x^6+15x^5-39x^4+5x^3$.

Dunque:
$$(4x^5-3x^4-7x^3+x^2)(2x^3-4x^2+5x)$$
$$=8x^8-22x^7+18x^6+15x^5-39x^4+5x^3.$$

28. Quando la lettera ordinatrice ha lo stesso esponente in più termini, si ordinano questi termini fra loro per le potenze d' un' altra lettera.

Per esempio, se si ordinasse un polinomio per la lettera a, e che in un fattore vi fossero i termini a^3b^2, $4a^3c^2$, e $-5a^3bc$, nei quali a ha lo stesso esponente, si potrebbero ordinare questi termini fra loro per le potenze di b, e si avrebbe
$$a^3b^2-5a^3bc+4a^3c^2.$$

Si può anche per questi termini scrivere una sola volta la lettera ordinatrice col suo esponente, e porre innanzi ad essa, fra parentesi, la somma dei suoi moltiplicatori, ordinandoli per le potenze di un' altra lettera.

Così, nell' esempio precedente, pei termini a^3b^2, $4a^3c^2$, e $-5a^3bc$, si avrebbe $(b^2-5bc+4c^2)a^3$.

Oppure, si scrivono in una stessa colonna i moltiplicatori d' una medesima potenza della lettera ordina-

trice; si tira a destra di questa colonna una linea verticale, e poi si pone alla destra di questa linea la lettera ordinatrice col suo esponente.

Così, pei termini a^3b^2, $4a^3c^2$, e $-5a^3bc$, si avrebbe

$$\begin{array}{r|l} b^2 & a^3 \\ -5bc & \\ +4c^2 & \end{array}$$

Applicazione.

Debbasi moltiplicare

$$a^3b^2-5a^3bc+4a^3c^2-6a^2b^3+3a^2b^2c$$

per

$$a^2b^2-6a^2bc-ab^3-4ab^2c.$$

Operazione.

Moltiplicando

$$\begin{array}{r|l|l} b^2 & a^3 -\ 6b^3 & a^2 \\ -\ 5bc & \quad +\ 3b^2c & \\ +\ 4c^2 & & \end{array}$$

Moltiplicatore

$$\begin{array}{r|l|l} b^2 & a^2 -\ \ b^3 & a \\ -\ 6bc & \quad -\ 4b^2c & \end{array}$$

Prodotti parziali

$$\begin{array}{r|l|l|l} b^4 & a^5 -\ 6b^5 & a^4 & \\ -\ 5b^3c & \quad +\ 3b^4c & & \\ +\ 4b^2c^2 & \quad +36b^4c & & \\ -\ 6b^3c & \quad -18b^3c^2 & & \\ +30b^2c^2 & & & \\ -24bc^3 & & & \\ & \quad -\ b^5 & +\ 6b^6 & a^3 \\ & \quad +\ 5b^4c & -\ 3b^5c & \\ & \quad -\ 4b^3c^2 & +24b^5c & \\ & \quad -\ 4b^4c & -12b^4c^2 & \\ & \quad +20b^3c^2 & & \\ & \quad -16b^2c^3 & & \end{array}$$

Prodotto totale

$$\begin{array}{r|l|l|l} b^4 & a^5 -\ 7b^5 & a^4 +\ 6b^6 & a^3 \\ -11b^3c & \quad +40b^4c & \quad +21b^5c & \\ +34b^2c^2 & \quad -\ 2b^3c^2 & \quad -12b^4c^2 & \\ -24bc^3 & \quad -16b^2c^3 & & \end{array}$$

Spiegazione.

Dopo aver ordinati i due polinomi nell'ultimo modo (n.° 28) si sono moltiplicati tutti i termini del moltiplicando, posti alla sinistra della prima linea verticale, per i termini b^2a^2 e $-6bca^2$ del moltiplicatore ed abbiamo ottenuti i sei prodotti parziali che vedonsi alla sinistra della prima linea verticale, a destra della quale il prodotto di a^3 per $a^2 = a^5$ è stato scritto una sola volta ed è fattore di ciascuno di questi sei prodotti. Poi abbiamo moltiplicato i termini del moltiplicando, posti alla destra della seconda linea verticale, per gli stessi termini b^2a^2 e $-6bca^2$ del moltiplicatore, ed abbiamo trovato i quattro prodotti parziali, scritti alla sinistra della seconda linea verticale, a destra della quale è a^4, prodotto di a^3 per a^2, fattore di ciascuno di questi quattro prodotti.

Indi si sono moltiplicati i primi tre termini del moltiplicando per i termini $-b^3a$ e $-4b^2ca$ del moltiplicatore, ed i sei prodotti parziali così ottenuti, li abbiamo posti sotto alla seconda colonna, per non ripetere il fattore a^4, che si ottiene moltiplicando a^3 per a. Per ultimo abbiamo moltiplicato i due termini del moltiplicando, posti alla sinistra della seconda linea, per gli stessi termini $-b^3a$ e $-4b^2ca$ del moltiplicatore, e così si sono ottenuti i quattro prodotti parziali, collocati alla sinistra della terza linea, a destra della quale trovasi a^3, prodotto di a per a^2, e fattore di ciascuno di questi quattro termini. Finalmente è stata fatta la somma o riduzione dei termini simili, onde avere il prodotto totale.

29. Termineremo ciò che riguarda la moltiplicazione algebrica con alcune osservazioni.

1.ª Quando i due fattori d' un prodotto sono ordinati per una stessa lettera, il prodotto parziale del primo termine del moltiplicando pel primo termine del moltiplicatore non è simile ad alcuno degli altri prodotti parziali, e per conseguenza non può ridursi con nessuno di essi, e forma il primo termine del prodotto totale ordinato nella stessa maniera dei fattori; tal è a^5b^4 nell' esempio precedente.

Un principio analogo esiste per l' ultimo termine.

2.ª Il prodotto d' un polinomio per un monomio o di un polinomio per un polinomio è un polinomio.

3.ª Il prodotto di due polinomi interi contiene sempre tutte le loro lettere, malgrado i termini che possono distruggersi nel prodotto.

4.ª Eseguendo le tre moltiplicazioni seguenti, si trova che

1.ª $(a+b)\times(a+b)=a^2+2ab+b^2$
2.ª $(a-b)\times(a-b)=a^2-2ab+b^2$
3.ª $(a+b)\times(a-b)=a^2-b^2$.

Dal che si deduce che

I. *Il quadrato della somma di due quantità è uguale al quadrato della prima, più il doppio del prodotto della prima per la seconda, più il quadrato della seconda.*

II. *Il quadrato della differenza di due quantità è uguale al quadrato della prima, meno il doppio del prodotto della prima per la seconda, più il quadrato della seconda.*

III. *Il prodotto della somma di due quantità per la loro differenza è uguale alla differenza dei quadrati di queste due quantità.*

Nota sulla regola dei segni nella Moltiplicazione algebrica.

a) Moltiplicare un numero *negativo* per un numero positivo è l' operazione per la quale si moltiplicano due

numeri qualunque l'uno per l'altro; cioè significa ripetere tante volte la quantità negativa quante sono le unità del numero positivo considerato come *moltiplicatore astratto*. E siccome il prodotto dev' essere della stessa natura del moltiplicando (vedi Aritmetica), esso dev' essere necessariamente *negativo*.

Così

$$-a \times 5 = -5a.$$

b) Avviene lo stesso nella moltiplicazione d'un numero positivo per un numero negativo, perchè si può sempre invertire l'ordine dei fattori e ridurre l'operazione ad avere il numero positivo per moltiplicatore.

Così

$$5 \times -a = -a \times 5 = -5a.$$

c) Quanto alla moltiplicazione di due numeri *negativi*, è un assurdo tanto in Aritmetica quanto in Algebra; perchè non si può moltiplicare $-a$ per $-b$, come non si può moltiplicare -4 per -6. Ciò nonostante si dà per regola dei segni *in Algebra* che $- \times - = +$. Questa regola è esatta fino ad un certo punto. Ed ecco come può spiegarsi:

È verissimo che il prodotto di $-$ per $-$ dà $+$ al resultato, ma ciò relativamente alle quantità *positive* da cui le quantità negative debbono essere dedotte.

Si può moltiplicare $5-2$ per $5-2$ e non -2 per -2, isolando cioè -2 da $+5$. La moltiplicazione di -2 per -2 non può avere alcun significato, perchè, in questo caso, il prodotto 4 che si affètta del segno $+$ non ha che un valore *relativo*, mentre che $(5-2) \times (5-2)$ dà quattro moltiplicazioni differenti, fra le quali si trova quella di -2 per -2, che combinate fra loro dànno il vero valore di $(5-2) \times (5-2)$, che è $3 \times 3 = 9$.

Ecco il prospetto del calcolo:

$$\begin{array}{lr}
+5 \times +5 = 25 & \\
-2 \times +5 = & -10 \\
+5 \times -2 = & -10 \\
-2 \times -2 = 4 & \\
\hline
\end{array}$$

Così: $(5-2) \times (5-2) = 29 - 20 = 9.$

Da questi resultati è facilissimo vedere che il valore di -2×-2 non può essere isolato, o che non può avere un senso, se non quando è combinato colle altre tre moltiplicazioni che sono relative a $5-2$.

Il valore di $+4$ non è reale se non che relativamente a $25-20$. Allora si ha $25-20=5$ e $5+4=9$. Così quando si dice che $(- \times - = +)$ si sottintende che il resultato ottenuto dev' essere affètto dal segno $+$, comparativamente alle altre qualità di cui fa parte e che sono maggiori di quelle che dovrebbero essere, e non può supporsi che la espressione $- \times -$ possa essere mai isolata, a meno di esprimere un' assurdo.

ESERCIZI.

XVIII. Eseguire le seguenti moltiplicazioni :

$6a\times7b$; $3a\times14c$; $-3a\times14c$; $7a\times-10b$; $a\times7b$; $-6a\times-11x$; $ab\times cde$; $-5abc\times-7ade$; $-5bd\times9b^2dxy$; $a^m\times a^n$; $5a^3\times a^2\times7a$; $-a^5x\times a^2x$;

$(6a+3b-5f)\times3g$; $(-2b+c-g)\times-8h$;

$(7ad-15bc-16ac)\times10ab$; $(a+b)(c+d)$;

$(a+b-c)(d-e)$; $(2a-3b-8c-d+9)(7a+2b+3)$;

$(2a+5b+3c-5c)(3a+10b+15f)$;

$(a^2-3ab-5b^2)\times4a^2b$; $(2a^3b^5-5a^2c^6+9a^3b^2c^3)\times3a^2bc^2$;

$(a^4-2b^3)(a-b)$; $(x^2-3x-7)(x-2)$;

$[(a+b)x^2+(a^2-b^2)x+a^3-a^2b]$

$\times[(a-b)x^2+(b^2-ab)x+b^3]$.

XIX. Verificare le uguaglianze:

$$(3k^2-5kl+2l^2)(k^2-7kl)=3k^4-26k^3l+37k^2l^2-14kl^3.$$

$$(4a^2-16ax+3x^2)(5a^3-2a^2x)$$
$$=20a^5-88a^4x+47a^3x^2-6a^2x^3.$$

$$(a^2+az+z^2)(a^2-az+z^2)=a^4+a^2z^2+z^4.$$

$$(x^4-3x^2+2x+1)\,(x^3-2x-2)$$
$$=x^7-5x^5+7x^3-2x^2-6x-2.$$

$$(x-a)\,(x-b)\,(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2$$
$$+(ab+ac+bc)x-abc.$$

$$(x-2a)\,(x-a)\,(x+a)\,(x+2a)=x^4-5a^2x^2+4a^4.$$

$$(x^2-ax+a^2)\,(x^2+ax+a^2)\,(x^4-a^2x^2+a^4)$$
$$=x^8+x^4a^4+a^8.$$

XX. Eseguire la seguente moltiplicazione e ridurre il resultato in numero facendo

$$a=2\,;\; b=3.$$

$$(2a^3b-5ab^2+3b)\,(7ab-4a+11a^2b^3).$$

Resultato : $\quad -40326.$

XXI. Formare le prime cinque potenze dei binomi $a+b$; $a-b$.

XXII. Separare i fattori comuni ai termini dei seguenti polinomi :

$$15a^3x+5a^2x^2-5ax;\quad mr^3+mr^3-mr^3+c^2;$$
$$3a^4-2a^2b+a^2-3a^3b^2;\quad a^4bc^2-3a^4b+a^4b+a;$$
$$7x^3y-2ax^2+5x^4y^2-x^5+7bx.$$

XXIII. Verificare le uguaglianze :

$$(a+2b)a^3-(b+2a)b^3=(a-b)\,(a+b)^3.$$
$$a(a-2b)^3-b(b-2a)^3=(a-b)\,(a+b)^3.$$

XXIV. Provare che *il quadrato di una quantità negativa è positivo*: che *il cubo di una quantità negativa è negativo*; e che per conseguenza, *le potenze pari d' una quantità negativa sono positive*, *e le impari sono negative.*

DIVISIONE

30. Nella Divisione algebrica, come, nella Moltiplicazione, si debbono osservare quattro regole:

I. **La regola dei segni,** che consiste nel dare al quoziente il segno $+$, quando il dividendo e il divisore hanno segno uguale; e il segno $-$, quand'hanno segno differente.

Così: 1.ª $a:b=q$,
2.ª $-a:-b=q$,
3.ª $a:-b=-q$,
4.ª $-a:b=-q$.

Infatti, il quoziente di ciascuna di queste divisioni moltiplicato pel divisore, riproduce il dividendo, cioè (n.º 22—I.):

$$q\times b=a,$$
$$q\times -b=-a,$$
$$-q\times -b=a,$$
$$-q\times b=-a.$$

II. **La regola delle lettere,** che consiste nel sopprimere nel dividendo le lettere che esso ha comuni col divisore, e che hanno lo stesso esponente.

Così: $a^2bcd:db=a^2c$.
Infatti, $a^2c\times bd=a^2bcd$.

III. **La regola dei coefficienti,** la quale consiste nel dividere il coefficiente del dividendo per quello del divisore.

Così: $8ab:2a=4b$.
Infatti, $4b\times 2a=8ab$.

IV. **La regola degli esponenti differenti delle**

lettere uguali, che consiste nello scrivere una sola volta ciascuna lettera come fattore al quoziente, dandole per esponente la differenza degli esponenti della stessa lettera nel dividendo e nel divisore.

Così: $a^5b^3 : a^3b^2 = a^2b$.

Infatti (n.° 22 — IV.), $a^2b \times a^3b^2 = a^5b^3$.

31. Quando l' esponente del divisore *è minore* di quello del dividendo, la regola precedente non offre alcuna difficoltà; ma può accadere che l' esponente del divisore sia *uguale* a quello del dividendo, o *maggiore* di esso.

32. Supponiamo primieramente che gli esponenti sieno *uguali*, per esempio $a^2 : a^2$.

Secondo la regola (n.° 30—IV.), il quoziente sarà a^0, perchè $2-2=0$; ma si ha pure

$$a^2 : a^2 = 1;$$

dunque $a^0 = 1$;

onde *ogni quantità affètta dall' esponente zero è uguale all' unità.*

33. Supponiamo ora che l' esponente del divisore sia *maggiore* di quello del dividendo; per esempio

$$a^3 : a^5.$$

Secondo la regola degli esponenti sarà

$$a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2};$$

l' origine adunque d' un esponente negativo è una divisione nella quale l' esponente del dividendo è minore di quello del divisore; ma

$$a^3 : a^5$$

può porsi sotto la forma $\frac{a^3}{a^5}$;

ora $a^3 = a^3 \times 1$, e $a^5 = a^2 \times a^3$;

onde $$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3 \times 1}{a^2 \times a^3}.$$

Sopprimendo in quest' ultima espressione il fattore a^3 comune al dividendo ed al divisore, resterà

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{1}{a^2}.$$

Dal che si deduce che *il valore di qualunque lettera affètta da un esponente negativo è rappresentato da una frazione avente per numeratore l' unità e per denominatore questa stessa lettera coll' esponente positivo.*

Così: $$a^{-3} = \frac{1}{a^3}; \quad x^{-m} = \frac{1}{x^m}.$$

34. Si rileva da ciò che *per far passare un fattore di un' espressione frazionaria dal denominatore al numeratore, e reciprocamente, basta cambiare il segno all' esponente della lettera.*

Così: $$\frac{a^3b^2}{c^4d^5} = a^3b^2c^{-4}d^{-5}; \quad a^8b^6 = \frac{1}{a^{-8}b^{-6}}.$$

35. Il più delle volte il resultato d' una divisione algebrica non è che un' espressione frazionaria: ciò avviene nei tre casi seguenti:

I. Quando i coefficienti del dividendo non sono divisibili per quelli del divisore.

II. Quando una lettera del divisore ha un esponente maggiore che nel dividendo.

III. Quando il divisore ha qualche lettera che non apparisce nel dividendo.

Esempio. $$36a^4b^2c : 21a^2b^4cd = \frac{36a^4b^2c}{21a^2b^4cd};$$

questa espressione può però semplificarsi, sopprimendo i fattori comuni 3, a^2, b^2, c, giacchè

$$\frac{36a^4b^2c}{21a^2b^4cd} = \frac{3\times12\times a^2\times a^2\times b^2\times c}{3\times7\times a^2\times b^2\times b^2\times c\times d} = \frac{12a^2}{7b^2d}.$$

Divisione di un polinomio per un monomio.

36. Abbiamo veduto (n.° 24) che per avere il prodotto di un polinomio per un monomio basta moltiplicare ciascun termine del polinomio per il monomio; *si eseguirà* dunque *la divisione d' un polinomio intero per un monomio intero, col dividere ciascun termine del dividendo pel divisore, dando al quoziente il segno + o il segno —, secondoché i due termini sono affètti da segno uguale o da segno contrario.* — Il quoziente sarà *intero*, se ciascun termine del dividendo è divisibile separatamente pel divisore; in caso contrario sarà *frazionario*.

Esempio.

$$(21a^5b^3-15a^3b^4+3a^6b^2):3a^2b^2=7a^3b-5ab^2+a^4.$$

Infatti, il quoziente $7a^3b-5ab^2+a^4$, moltiplicato pel divisore $3a^2b^2$, riproduce il dividendo.

Altri esempi:

$$(28a^2b^3+12a^4b^2-8ab):(-4ab)=-7ab^2-3a^3b+2;$$

$$(-12m^3n^2p^5+6m^4np^2-36mn^5p^4):(-6mnp^2)$$
$$=2m^2np^3-m^3+6n^4p^2.$$

Divisione dei polinomi.

37. Regola: *Per avere il quoziente di due polinomi interi, si ordinano per le potenze decrescenti di una stessa lettera; indi scritto il divisore alla destra del dividendo, si divide il primo termine del dividendo pel primo termine del divisore, e si ha il primo termine del quoziente. Si moltiplica il divisore per questo primo termine, e il*

prodotto si sottrae dal dividendo. Si divide il primo termine del resto ordinato pel primo termine del divisore, e si ottiene il secondo termine del quoziente. Si moltiplica il divisore per questo secondo termine, e il prodotto si sottrae dal primo resto, e così di seguito.

Esempio. — Debbasi dividere $8a^5-26a^4b+7a^3b^2+30a^2b^3-22ab^4+3b^5$ per $2a^3-3a^2b-5ab^2+b^3$.

Operazione.

	$8a^5-26a^4b+7a^3b^2+30a^2b^3-22ab^4+3b^5$	$2a^3-3a^2b-5ab^2+b^3$
	$-8a^5+12a^4b+20a^3b^2-4a^2b^3$	$4a^2-7ab+3b^2$
1.° resto	$-14a^4b+27a^3b^2+26a^2b^3-22ab^4+3b^5$	
	$+14a^4b-21a^3b^2-35a^2b^3+7ab^4$	
2.° resto	$+6a^3b^2-9a^2b^3-15ab^4+3b^5$	
	$-6a^3b^2+9a^2b^3+15ab^4-3b^5$	
	$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$	

Spiegazione.

I due polinomi sono ordinati per le potenze decrescenti di a. Si divide il primo termine $8a^5$ del dividendo pel primo termine $2a^3$ del divisore, e si ha (n.° 30) il primo termine del quoziente $4a^2$. Si moltiplica tutto il divisore per $4a^2$, e si sottrae il prodotto dal dividendo: a tal uopo si scrivono sotto al dividendo i differenti termini del prodotto con segni contrarî (n.° 19), e poi si fa la riduzione dei termini simili. Si ottiene così il primo resto. Si divide il primo termine $-14a^4b$ di questo resto pel primo termine $2a^3$ del divisore, e si ottiene il secondo termine $-7ab$ del quoziente. Si osservi che questo termine deve

essere affètto dal segno —, in virtù della regola dei segni stabilita più avanti. Si moltiplica il divisore per questo secondo termine, si sottrae il prodotto dal resto, e si ha così un secondo resto. Si divide il primo termine $+6a^3b^2$ di questo secondo resto pel primo termine $2a^3$ del divisore, e si ottiene il terzo termine $+3b^2$ del quoziente. Si moltiplica il divisore per questo terzo termine, e si sottrae il prodotto dal secondo resto; si trova *zero*, e l'operazione è terminata. Il quoziente è dunque

$$4a^2-7ab+3b^2.$$

Per riconoscere l'esattezza dell'operazione, basta moltiplicare questo quoziente pel divisore: il prodotto deve uguagliare il dividendo.

DIMOSTRAZIONE.

Per dimostrare questa regola, basta osservare che il dividendo essendo il prodotto del divisore pel quoziente, il primo termine del dividendo *ordinato* è il prodotto del primo termine del divisore *ordinato*, pel primo termine del quoziente parimente *ordinato*. Si avrà dunque il primo termine del quoziente col dividere il primo termine del dividendo pel primo termine del divisore, perchè così si dividerà un prodotto per uno dei suoi fattori. Ma il dividendo essendo il resultato d'una moltiplicazione, rappresenta la somma dei prodotti dei termini del divisore per quelli del quoziente; se dunque si sottrae dal dividendo il prodotto del divisore pel primo termine del quoziente, il resto sarà il prodotto del divisore per tutti gli altri termini del quoziente, *eccettuato il primo*. Si potrà quindi ra-

gionare su questo resto come sul dividendo proposto; ed è evidente che col dividere il primo termine d'ogni resto ordinato, si avrà ciascun termine del quoziente richiesto.

38. Altri esempi. Dividere a^3-b^3 per $a-b$.

Operazione.

$$\begin{array}{lr|l}
 & a^3-b^3 & a-b \\
 & -a^3+a^2b & a^2+ab+b^2 \\ \hline
1.^{\circ}\text{ resto} & +a^2b-b^3 & \\
 & -a^2b+ab^2 & \\ \hline
2.^{\circ}\text{ resto} & +ab^2-b^3 & \\
 & -ab^2+b^3 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Dunque: $(a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2$.

Questa divisione dimostra che *la differenza dei cubi di due numeri è sempre divisibile per la differenza degli stessi numeri.*

Dividere a^3+b^3 per $a+b$.

Operazione.

$$\begin{array}{lr|l}
 & a^3+b^3 & a+b \\
 & -a^3-a^2b & a^2-ab+b^2 \\ \hline
1.^{\circ}\text{ resto} & -a^2b+b^3 & \\
 & +a^2b+ab^2 & \\ \hline
2.^{\circ}\text{ resto} & +ab^2+b^3 & \\
 & -ab^2-b^3 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Dunque: $(a^3+b^3):(a+b)=a^2-ab+b^2$.

Questa divisione fa vedere che *la somma dei cubi di due numeri è sempre divisibile per la somma degli stessi numeri.*

39. Quando i polinomi proposti contengono più termini non simili dello stesso grado rapporto alla lettera ordinatrice, i coefficienti delle diverse potenze di questa lettera sono polinomi e l' operazione diviene assai complicata. — Debbasi dividere, per esempio, il polinomio

$$(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3)x^4+(a^5-3a^4b+a^3b^2+b^5)x^3$$
$$+(-a^5b+2a^3b^3-2a^2b^4-2ab^5-b^6)x^2$$
$$+(a^4b^3+2a^3b^4-a^2b^5+ab^6+b^7)x-(a^2b^6+b^8)$$

per
$$(a^2+b^2)x^2-(a^2b+ab^2)x+b^4.$$

Operazione.

x^4	x^3	x^2	x		Divisore
a^4 $-a^3b$ $+a^2b^2$ $-ab^3$	$+a^5$ $-3a^4b$ $+a^3b^2$ $+b^5$	$-a^5b$ $+2a^3b^3$ $-2a^2b^4$ $-2ab^5$ $-b^6$	$+a^4b^3$ $+2a^3b^4$ $-a^2b^5$ $+ab^6$ $+b^7$	$-a^2b^6$ $-b^8$	$a^2+b^2 \mid x^2 - a^2b - ab^2 \mid x + b^4$
	$+a^4b$ $+a^3b^2$ $-a^3b^2$ $-a^2b^3$	$-a^2b^4$ $+ab^5$ $+a^5b$ $+a^4b^2$ $-2a^4b^2$ $-2a^3b^3$ $+a^2b^4$ $+ab^5$	a^3b^4 $+2a^2b^5$ $-b^7$ $-a^4b^3$ $-a^3b^4$ $-a^2b^5$ $-ab^6$	$+a^2b^6$ $+b^8$	Quoziente: $a^2-ab \mid x^2 + a^3 - 2a^2b + b^3 \mid x - a^2b^2 - b^4$
	$+a^5$ $-2a^4b$ $+a^3b^2$ $-a^3b^3$ $+b^5$	$-a^4b^2$ $-2a^2b^4$ $-b^6$	0	0	

Prima divisione parziale.

$$
\begin{array}{l|l}
a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3 & a^2+b^2 \\
-a^4 \qquad -a^2b^2 & \overline{a^2-ab} \\
\hline
-a^3b \qquad -ab^3 & \\
+a^3b \qquad +ab^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Seconda divisione parziale.

$$
\begin{array}{l|l}
a^5-2a^4b+a^3b^2-a^2b^3+b^5 & a^2+b^2 \\
-a^5 \qquad -a^3b^2 & \overline{a^3-2a^2b+b^3} \\
\hline
-2a^4b \qquad -a^2b^3+b^5 & \\
+2a^4b \qquad +2a^2b^3 & \\
\hline
+a^2b^3+b^5 & \\
+a^2b^3-b^5 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Terza divisione parziale.

$$
\begin{array}{l|l}
-a^4b^2-2a^2b^4-b^6 & -a^2+b^2 \\
+a^4b^2+a^2b^4 & \overline{-a^2b^2+b^4} \\
\hline
-a^2b^4-b^6 & \\
+a^2b^4-b^6 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Spiegazione.

I due polinomi sono ordinati per le potenze decrescenti d'x e i coefficienti sono anch'essi ordinati per le potenze decrescenti di a.

Per avere il primo termine del quoziente bisogna dividere il primo termine del dividendo pel primo ter-

mine del divisore; abbiamo dunque diviso il coefficiente

$$a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3$$

del primo termine del dividendo pel coefficiente a^2+b^2 del primo termine del divisore; e facendo a parte questa divisione, abbiamo trovato

$$(a^2-ab)x^2$$

pel primo termine del quoziente. — Abbiamo moltiplicato il divisore pel primo termine del quoziente e il resultato è stato scritto con segni contrari sotto al dividendo e nelle rispettive colonne. Si è omesso il prodotto del primo termine del divisore, perchè sappiamo che questo prodotto distrugge il primo termine del dividendo. E poiché basta conoscere il primo termine del resto per continuare l' operazione, non abbiamo fatta la riduzione dei termini simili che nella seconda colonna verticale.

Per avere il secondo termine del quoziente, abbiamo diviso il primo termine del resto pel primo termine del divisore, eseguendo a parte la divisione del coefficiente

$$a^5-2a^4b+a^3b^2-a^2b^3+b^5$$

di questo primo termine pel coefficiente a^2+b^2 del primo termine del divisore, e si è trovato

$$+(a^3-2a^2b+b^3)x$$

pel secondo termine del quoziente. — Abbiamo moltiplicato il divisore pel secondo termine del quoziente e il resultato con segni contrari è stato scritto sotto al dividendo e nelle rispettive colonne. Si è omesso il prodotto del primo termine del divisore, giacchè sappiamo che esso distrugge il primo termine del resto, e abbiamo ridotto i termini simili nella terza co-

lonna verticale, per avere il primo termine del nuovo resto.

Dividendo a parte il coefficiente

$$-a^4b^2-2a^2b^4-b^6$$

del primo termine del secondo resto pel coefficiente a^2+b^2 del primo termine del divisore, abbiamo ottenuto il terzo termine del quoziente

$$-a^2b^2-b^4.$$

Fatto il prodotto del divisore pel terzo termine del quoziente, scritto il resultato sotto al dividendo con segni contrari e fatta la riduzione dei termini simili nella quarta e quinta colonna verticale, abbiamo trovato un resto nullo; perciò l'operazione è terminata.

Divisibilità di un polinomio intero per un binomio della forma $x-a$.

40. Dividendo un polinomio P, ordinato per le potenze decrescenti d'x, per $x-a$, il resto che dev'essere di grado inferiore al divisore, non conterrà la lettera x.

Indicando con Q il quoziente della divisione e con R il resto, avremo l'uguaglianza

$$P=Q(x-a)+R,$$

la quale è vera qualunque sia il valore d'x.

Facendo $x=a$, il prodotto $Q\,(x-a)$ diventa nullo, ma il resto R, che è indipendente da x, non cambia valore; e se rappresentiamo con P^1 il polinomio ottenuto facendo $a=x$, avremo $P^1=R$.

Da ciò resulta che *il resto della divisione d'un po-*

linomio P per x—a non è altro che il resultato ottenuto sostituendo a ad x in questo polinomio; e, per conseguenza, la divisione si farà esattamente sol quando tale sostituzione dia per resultato 0.

ESEMPI:

I. Il polinomio

$$4x^4+3x^3+2x^2-4ax^3-3ax^2-2ax$$

è divisibile pel binomio

$$x-a,$$

perchè, sostituendo a ad x nel polinomio stesso, si ha:

$$4a^4+3a^3+2a^2-4a^4-3a^3-2a^2=0.$$

II. Il binomio x^m-a^m è divisibile per $x-a$, perchè sostituendo nel primo a ad x, si trova $a^m-a^m=0$.

È da notare che eseguendo questa divisione si ha per resultato

$$x^{m-1}+ax^{m-2}+a^2x^{m-3}\ldots\ldots+a^{m-2}x+a^{m-1}.$$

In questo quoziente che contiene m termini, gli esponenti d'x vanno successivamente diminuendo di una unità da un termine all'altro, e quelli di a vanno aumentando successivamente di un'unità.

III. Il binomio x^m+a^m non è divisibile per $x-a$, perchè sostituendo come sopra, si ha

$$a^m+a^m=2a^m.$$

Eseguendo la divisione, si troverà un quoziente uguale al precedente, e un resto uguale a $2a^m$.

IV. Il binomio x^m-a^m è divisibile per $x+a$, se l'esponente m è pari, e i termini del quoziente saranno affètti alternativamente dal segno $+$ e dal segno $-$; per conseguenza, essendo essi in numero uguale ad m, se m è pari, l'ultimo termine sarà affètto dal segno $-$, e l'ultimo resto sarà $+a^m-a^m=0$.

Se l'esponente m è impari, il quoziente avendo un numero impari di termini, finisce col segno $+$, ed il resto è $-a^m-a^m=-2a^m$. In questo caso la divisione è impossibile.

V. Il binomio x^m+a^m diviso per $x+a$ darà per resto *zero* se m è impari, e il quoziente avrà la stessa forma che nell'esempio precedente. Ma se m è pari, l'ultimo termine del quoziente ha il segno $-$, e si trova per resto

$$+a^m+a^m=2a^m.$$

Da ciò si conclude che x^m-a^m è divisibile per $x+a$, quando m è pari: e x^m+a^m è divisibile per $x+a$, quando m è impari.

ESERCIZI.

XXV. Eseguire le seguenti divisioni:

$8a^2bc : 2ab$; $16a^4b^2cd^3 : 4a^2bcd^2$; $(8a^4-12a^3+6a) : 2a$;

$(12x^6-8x^5+6x^3-2x^2) : 2x$; $(ab-ac) : (b-c)$;

$$(ac-bc+ad-bd) : (a-b);$$

$$(4a^2+6ab-4ax+9bx-15x^2) : (2a+3x);$$

$$(a^2+ab+2ac-2b^2+7bc-3c^2) : (a+2b-c);$$

$$(4c^4-4bc^3-9b^2c^2+13b^3c-4b^4) : (2c^2-3bc+b^2).$$

XXVI. Verificare le seguenti uguaglianze:

$$(a^5b-2a^3b^3c^2+a^3b^3+a^2b^4c^3+a^2b^4c-ab^5c^2)$$
$$: (a^3b+a^2b^2c-ab^3c^2)=a^2-abc+b^2.$$

$$(2a^4-13a^3b+31a^2b^2-38ab^3+24b^4)$$
$$=(2a^2-3ab+4b^2)\times(a^2-5ab+6b^2).$$

$$[(4a+6b-4x)a+9bx-15x^2]$$
$$=(2a+3b-5x)\times(2a+3x).$$

$$(a^3+a^2b-ab^2-b^3) : (a-b)=a^2+2ab+b^2.$$

$$(3a^5+16a^4b-33a^3b^2+14a^2b^3):(a^2+7ab)$$
$$=3a^3-5a^2b+2ab^2.$$
$$(a^7-6a^6b^3+14a^5b^6-12a^4b^9):(a^3-2a^2b^3)$$
$$=a^4-4a^3b^3+6a^2b^6.$$
$$(a^4-2a^2b^2+b^4):(a^2-b^2)=a^2-b^2.$$
$$(a^8-16z^8):(a^2-2z^2)=a^6+2a^4z^2+4a^2z^4+8z^6.$$

XXVII. Dividere
$$3(b+1)a^4+(b^2-3b-1)a^3-(b^2+4)a^2+a+1$$
per
$$(b+1)a^2-ba-1.$$
Resultato: Quoziente $=3a^2+(b-1)a-1$.

XXVIII. Dividere
$$(x+y)^3+3(x+y)^2z+3(x+y)z^2+z^3$$
per
$$(x+y)^2+2(x+y)z+z^2.$$
Resultato: Quoziente $=x+y+z$.

XXIX. Provare che i binomi
$$x^2-a^2,\ x^3-a^3,\ x^4-a^4, \ldots\ldots x^m-a^m$$
sono divisibili per $x-a$.

XXX. Calcolare l' espressione
$$(a^6+2a^3z^3+z^6):(a^2-az+z^2),$$
e ridurre il resultato in numero, facendo $a=5$; $z=3$.
Resultato: 1216.

ESERCIZI

di recapitolazione sulle prime quattro operazioni.

XXXI. Verificare le seguenti uguaglianze:
$$(3c^2p+2cp-m)+(2m-3cp+2c)+(3c^2p+cp)$$
$$=6c^2p+m+2c.$$

$$(3a^2m+4m^2-am^3)+(6m^2+8q)+(-2am^3-4q)$$
$$+(-9m^2-4q)=3a^2m+m^2-3am^3=-171,$$

quando sia $a=5,\ m=3,\ q=2.$

$$(3m^2p+2m^3r^2)-(2m+4mr^3-2m^2p)=5m^2p$$
$$+2m^3r^2-2m-4mr^3=-779,$$

quando sia $m=1,\ p=3,\ r=6.$

$$(2gp-c)\,(4g^2p^2+2cgp+c^2)=8g^3p^3-c^3=13816,$$

quando sia $g=3,\ p=4,\ c=2.$

$$(a^6-16a^3x^3+64x^6):(a^2-4ax+4x^2)=21904,$$

quando sia $a=8,\ x=3.$

XXXII. Mostrare che le seguenti uguaglianze sono vere:

$$(3a^2x-5b^3)\,(3a^2x+5b^3)=9a^4x^2-25b^6.$$

$$(5ab+3ac-c^2)\,(-5ab+3ac-c^2)$$
$$=(-25ab^2+9ac^2-6c^3)a+c^4.$$

$$(2a^4-13a^3b+31a^2b^2-38ab^3+24b^4):(2a^2-3ab+4b^2)$$
$$=a^2-5ab+6b^2.$$

$$(-1+a^3n^3):(-1+an)=1+an+a^2n^2.$$

$$x^9-1:x^3-1=x^6+x^3+1.$$

$$[m(qx^2-rx)+p(mx^3-nx^2-n(qx-r)]:(mx-n)$$
$$=px^2+qx-r.$$

$$[b(x^3+a^3)+ax(x^2-a^2)+a^3(x+a)]:[(a+b)\,(x+a)]$$
$$=x^2-ax+a^2.$$

$$[(3a^2+2b)-(2a^2+b)]:(a^3-ab+a^2b+b^2)=a+b.$$

Problemi.

1. È stato fatto il reparto di una eredità fra tre persone: la seconda ha avuto a lire di più della prima, e la terza b lire di più della seconda; sapendo che la prima ebbe x lire, trovare la formula che esprime il valore dell' eredità.

Resultato: $3x+2a+b$.

2. In un rettangolo il lato piu lungo supera di a metri il più corto, il quale è uguale a x metri, trovare il perimetro.

Resultato: $2(2x+a)$.

3. Il valore d' un angolo d' un triangolo è a gradi e gli altri due angoli sono uguali; si cerchi il numero dei gradi di uno di questi ultimi.

Resultato: $90-\frac{a}{2}$.

4. A dice a B: dammi a lire, giacchè ne possiedi tre volte più di me, e così io darò b lire a C, il quale ha c lire meno di me. — Trovare quanto possiede ciascuno, supposto che A avesse x lire.

Resultato: A possiede $x+a-b$;
B possiede $3x-a$; C ha $x-c+b$.

5. Ho nella mano sinistra 3 monete di più che nella destra; se da questa ne tolgo 5 per porle nella sinistra; quante monete avrò in ciascuna mano, posto che x indichi il numero di monete della mano destra?

Resultato: Nella destra: $x-5$; nella sinistra $x+8$.

6. Trovare l' area d' un rettangolo lungo x metri e la cui altezza ha d metri meno della lunghezza.

Resultato: Area: x^2-dx.

7. Due fontane empirono un bacino, l' una in x ore, e l'altra in 3 ore di più. — Qual'è la parte del bacino empita da ciascuna fontana?

Resultato: La parte è $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}$.

8. A qual tassa fu posta una somma A ad interesse semplice, sapendo che dopo n anni è divenuta B lire?

Resultato: Tassa: $\dfrac{100(B-A)}{nA}$.

IX. Due mercanti hanno venduto una quantità di merce allo stesso prezzo: il primo ne ha venduto x chilogr. per lire 160, il secondo 30 chilogr. di più del primo e ricevette lire 246. Qual è il prezzo del chilogrammo?

Resultato: Lire $2+\dfrac{13}{15}$.

X. Una persona ha x centesimi nella mano destra e 4 di più nella sinistra: essa raddoppia il numero dei centesimi che ha nella destra e triplica quelli che ha nella sinistra. Si dica quanti centesimi ha nelle mani.

Resultato: Ne ha $5x+12$.

Massimo comun divisore dei monomi e dei polinomi.

41. Per *massimo comune divisore* di due o più monomi o polinomi interi s'intende il prodotto di tutti i fattori primi comuni ad essi.

42. La ricerca del massimo comun divisore delle quantità monomie non offre alcuna difficoltà, purchè si considerino le lettere come fattori primi, e si applichi ad essi la regola dell'Aritmetica.

Così il massimo comun divisore dei monomi

$$3a^2cx, \qquad 9a^3c^2x, \qquad 27a^2c^3x^2,$$

è

$$3a^2cx.$$

43. Il metodo per trovare il massimo comun divisore fra due o più polinomi è in sostanza uguale a quello che si usa in Aritmetica; ma è più complicato nella pratica, se prima non si ha cura di preparare i termini per rendere il calcolo più facile; è perciò che premettiamo le seguenti osservazioni:

I. *Il massimo comun divisore di due polinomi non resta alterato, moltiplicandone o dividendone uno per una espressione che non abbia alcun fattore il quale si trovi nell'altro.*

Sia, per esempio, la frazione $\frac{bc}{bd}$, i cui termini hanno per divisore comune b; moltiplicando il numeratore per m, la frazione diviene $\frac{bcm}{bd}$. Il valore di questa frazione non è uguale a quello della proposta; ma il divisor comune al numeratore e al denominatore è rimasto quello che era. Avverrebbe lo stesso se, invece di moltiplicare il numeratore, si moltiplicasse il denominatore; ma se l'espressione per la quale si moltiplica o si divide l'una delle quantità avesse qualche fattore il quale si trovasse nell'altra, allora il massimo comun divisore resterebbe alterato.

Se, per esempio, si moltiplica il numeratore della frazione $\frac{bc}{bd}$ per ad, si avrà $\frac{abcd}{bd}$, di cui il divisor comune ai due termini è bd, mentre avanti la moltiplicazione era b.

II. *Si possono sopprimere nel dividendo e nel divisore i fattori comuni, purchè si moltiplichi il resultato finale per questi fattori.*

Infatti, il massimo comun divisore di due polinomi

così non viene alterato, perchè resta ugualmente il prodotto di tutti i fattori comuni (vedi Aritmetica).

11. Dopo avere dunque preparato i termini dei due polinomi colla moltiplicazione o colla divisione, per trovare il massimo comun divisore si ha la regola seguente:

Ordinate le espressioni, delle quali si vuole il massimo comun divisore, per le potenze di una medesima lettera, si divida quella espressione in cui questa lettera ha l'esponente maggiore per la seconda, e questa operazione si continui fino a che l'esponente della lettera, per la quale si sono ordinate quelle espressioni, sia nella prima di esse divenuto minore, o tutt'al più uguale all'esponente della stessa lettera nella seconda. Si divida poi la quantità, che precedentemente ha servito per divisore, pel resto della divisione: indi il primo resto si divida pel secondo, e così di seguito, fino a che si giunga ad una divisione senza resto; allora l'ultimo divisore è il massimo comune divisore cercato.

Questa regola si appoggia sul seguente principio:
Qualunque divisore comune a due quantità deve dividere il resto della loro divisione. (Vedi Aritmetica.)

ESEMPI:

I. Trovare il massimo comun divisore fra i due binomi a^2-b^2 e a^4-b^4.

Dividendo a^4-b^4 per a^2-b^2, il quoziente è a^2+b^2 senza resto; dunque a^2-b^2 è il massimo comun divisore richiesto.

II. Cercare il massimo con un divisore fra

$$12x^4y-27y^5 \quad \text{e} \quad 8x^4+12x^2y^2.$$

Ordinati i termini dei due polinomi per la lettera x, si dividerà il primo pel secondo; ma avanti tutto si

osservi che il fattore $3y$ è comune ai termini del primo, senza esserlo a quelli del secondo, e il fattore 2 moltiplica tutti i termini del secondo senza moltiplicare quelli del primo. Si potranno dunque sopprimere questi due fattori (osservazione I) senza che il massimo comun divisore resti alterato. — Si dividerà dunque $4x^4 - 9y^4$ per $4x^4 + 6x^2y^2$. Il quoziente è 1 con un resto $-6x^2y^2 - 9y^4$; si divide $4x^4 + 6x^2y^2$ per $-6x^2y^2 - 9y^4$; ma questo primo resto è moltiplicato dal fattore $-3y^2$, che non trovasi nel dividendo; si potrà dunque sopprimere, e divideremo così $4x^4+6x^2y^2$ per $2x^2+3y^2$. Il quoziente è $2x^2$ senza resto; dunque $2x^2+3y^2$ è il massimo comun divisore richiesto.

Ecco il prospetto dei calcoli:

Prima divisione.

$$\begin{array}{ll|l} & 4x^4-9y^4 & 4x^4+6x^2y^2 \\ & -4x^4-6x^2y^2 & 1 \\ \hline \text{resto} \ldots\ldots & -6x^2y^2-9y^4 & \end{array}$$

Seconda divisione.

$$\begin{array}{l|l} 4x^4+6x^2y^2 & 2x^2+3y^2 \\ -4x^4-6x^2y^2 & 2x^2 \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

III. Si domanda il massimo comun divisore delle due quantità $a^2-3ab+2b^2$ e $a^2-ab-2b^2$.

Disponendo queste due quantità per la divisione ed eseguendola, si ha:

$$\begin{array}{ll|l} & a^2-3ab+2b^2 & a^2-ab-2b^2 \\ & -a^2+ab+2b^2 & 1 \\ \hline \text{resto} \ldots\ldots & -2ab+4b^2 & \end{array}$$

Bisogna ora dividere la quantità $a^2-ab-2b^2$, che ha servito da divisore nella prima divisione, pel resto $-2ab+4b^2$ della divisione stessa; prima però di eseguire questa divisione, si osservi che il divisore ha per fattore comune $2b$, quantità non comune a tutti i termini del dividendo, per cui si sopprime, ed eseguendo poi la divisione, si ha

$$\begin{array}{r|l} a^2-ab-2b^2 & -a+2b \\ -a^2+2ab & \overline{-a-b} \\ \hline ab-2b^2 & \\ -ab+2b^2 & \\ \hline 0 \quad 0 & \end{array}$$

Conchiudesi adunque che il massimo comun divisore dei due polinomi proposti è $-a+2b$.

IV. Trovare il massimo comune divisore fra i due polinomi

$$x^4+3x^3+4x^2+6x+4, \text{ e } x^3+5x^2+7x+2.$$

Dividendo il primo polinomio pel secondo, si ha per quoziente $x-2$ ed un resto $7x^2+18x+8$.

Essendo questo resto di grado inferiore al divisore, si dividerà questo divisore pel resto; ma per render possibile questa divisione, bisogna moltiplicare il nuovo dividendo x^3+5x^2+7x+2 per 7, e si avrà $7x^3+35x^2+49+14$.

Diviso quest'ultimo polinomio pel nuovo divisore, si trova x per quoziente e un resto $17x^2+41x+14$.

Per poter continuare la divisione si moltiplica anche questo resto per 7, e si ha $119x^2+287x+98$; diviso questo polinomio per $7x^2+18x+8$, si ottiene 17 al quoziente, e per resto $-19x-38$.

Essendo questo resto di grado inferiore al divisore,

$7x^2+18x+8$, si considera quest'ultimo come dividendo e si divide pel resto $-19x-38$.

Ma prima d'eseguire la divisione, sopprimeremo in questo resto il fattor comune -19, che non è fattor comune del dividendo, e si avrà $x+2$.

Ora, dividendo $7x^2+18x+8$ per $x+2$, si avrà per resto *zero*.

Ecco il prospetto dei calcoli:

Prima divisione.

$$\begin{array}{lr|l}
 & x^4+3x^3+4x^2+6x+4 & x^3+5x^2+7x+2 \\
\cline{3-3}
 & -x^4-5x^3-7x^2-2x & \quad x-2 \\
\cline{2-2}
1.^{\circ}\ \text{resto} & -2x^3-3x^2+4x+4 & \\
 & +2x^3+10x^2+14x+4 & \\
\cline{2-2}
2.^{\circ}\ \text{resto}\ldots\ldots\ldots & 7x^2+18x+8 &
\end{array}$$

Seconda divisione.

$$\begin{array}{lr|l}
 & x^3+5x^2+7x+2 & 7x^2+18x+8 \\
\cline{3-3}
\text{ossia}\ldots\ldots & 7x^3+35x^2+49x+14 & \quad x+17 \\
 & -7x^3-18x^2-8x & \\
\cline{2-2}
1.^{\circ}\ \text{resto}\ldots\ldots & 17x^2+41x+14 & \\
\text{ossia}\ldots\ldots\ldots & 119x^2+287x+98 & \\
 & -119x^2-306x-136 & \\
\cline{2-2}
2.^{\circ}\ \text{resto}\ldots\ldots\ldots & -19x-38 &
\end{array}$$

Terza divisione.

$$\begin{array}{lr|l}
 & 7x^2+18x+8 & -19x-38 \\
 & -7x^2+14x & \text{ossia}\ldots\ x+2 \\
\cline{2-3}
1.^{\circ}\ \text{resto}\ldots\ldots & 4x+8 & \quad 7x+4 \\
 & -4x-8 & \\
\cline{2-2}
2.^{\circ}\ \text{resto}\ldots\ldots & 0\quad 0 &
\end{array}$$

Al modo stesso si troverebbe che il massimo comun divisore dei due polinomi

$$x^4+2x^3+2x^2+x \quad \text{e} \quad x^3+3x^2+2x$$

è

$$x^2+x.$$

45. *Per trovare il massimo comun divisore fra più polinomi* P, P', P'', *ecc., si cerca prima quello di due polinomi, per esempio, di* P *e* P'. *Sia questo* M. *Poi si cerca il massimo comun divisore dei polinomi* M *e* P'', *ecc.*, come in Aritmetica.

ESERCIZI.

XXXIII. Trovare il massimo comun divisore fra

$$5x^3-18x^2y+11xy^2-6y^3 \quad \text{e} \quad 7x^2-23xy+6y^2.$$

Resultato: Il M. C. D. è $x-3y$.

XXXIV. Trovare il M. C. D. fra

$$3a^3-2a^2-3ab^2+a+2b^2+b \quad \text{e} \quad a^2-b^2.$$

Resultato: Il M. C. D. è $a+b$.

XXXV. Trovare il M. C. D. fra

$$10x^2+14x-12 \quad \text{e} \quad 7x^2+22x+16.$$

Resultato: Il M. C. D. è $x+2$.

XXXVI. Trovare il M. C. D. fra

$$4x^3-16x^2+23x-20 \quad \text{e} \quad 6x^2-7x-20.$$

Resultato: Il M. C. D. è $2x-5$.

XXXVII. Trovare il M. C. D. fra

$$6y^3+16y^2-22y+40 \quad \text{e} \quad 9y^3-27y^2+35y-25.$$

Resultato: Il M. C. D. è $3y^2-4y+5$.

Minimo multiplo comune.

46. Si può applicare la ricerca del massimo comune divisore algebrico alla determinazione del polinomio

che resulta dal prodotto dei soli fattori primi necessarii, affinchè sia divisibile per più polinomi interi dati, il quale si chiamerà *polinomio minimo divisibile* per i medesimi, o loro *minimo multiplo comune.*

47. La regola per la ricerca del minimo multiplo comune delle quantità monomie è la seguente:

Si cerca il minimo multiplo comune dei coefficienti numerici colla regola data in Aritmetica, e alla destra del numero così ottenuto si pongono tutte le lettere che si trovano nelle espressioni, dando a ciascuna di esse il maggiore esponente che ha nelle espressioni medesime.

Esempio 1.° — Cercare il minimo multiplo comune di

$$16a^4bc \quad \text{e} \quad 20a^3b^3d.$$

Il minimo multiplo comune dei coefficienti è 80. Le lettere che si trovano nelle espressioni date sono a, b, c e d, e i loro maggiori esponenti sono rispettivamente 4, 3, 1 e 1. Così

$$80a^4b^3cd$$

è il minimo multiplo comune richiesto.

Esempio 2.° — Cercare il minimo multiplo comune di

$$8a^2b^3c^2x^5yz^3, \quad 12a^4bcx^2y^3, \quad \text{e} \quad 16a^3c^3x^2y^4.$$

Il minimo multiplo comune dei coefficienti numerici è 48. Le lettere che si trovano nelle espressioni date sono a, b, c, x, y e z, e i loro maggiori esponenti sono rispettivamente 4, 3, 3, 5, 4, e 3.

Quindi il minimo multiplo comune richiesto è $48a^4b^3c^3x^5y^4z^3$.

48. La regola per la ricerca del minimo multiplo comune di due polinomi è fondata sugli stessi principii che in Aritmetica, ed è la seguente:

Bisogna dividere il prodotto dei due polinomi pel loro massimo comune divisore: ovvero bisogna dividere uno di essi pel loro massimo comune divisore, e moltiplicare il quoziente per l'altro.

Esempio 1.° — Cercare il minimo multiplo comune di

$$x^2-4x+3 \quad e \quad 4x^3-9x^2-15x+18.$$

Il massimo comune divisore è $x-3$.

Dividiamo x^2-4x+3 per $x-3$; il quoziente è $x-1$. Quindi il minimo multiplo comune è

$$(x-1)(4x^3-9x^2-15x+18),$$

ovvero, eseguendo la moltiplicazione:

$$4x^4-13x^3-6x^2+33x-18.$$

Esempio 2.° — Cercare il minimo multiplo comune di

$$2x^4-7x^3-4x^2+x-4 \quad e \quad 3x^4-11x^3-2x^2-4x-16.$$

Il massimo comune divisore è x^2-3x-4; inoltre

$$(2x^4-7x^3-4x^2+x-4):(x^2-3x-4)=2x^2-x+1,$$

e

$$(3x^4-11x^3-2x^2-4x-16):(x^2-3x-4)=3x^2-2x+4;$$

quindi il minimo multiplo comune cercato è

$$(x^2-3x-4)(2x^2-x+1)(3x^2-2x+4).$$

49. Se si trattasse di cercare il minimo multiplo comune di più polinomi, A, B, C, D..., basterebbe cercarlo fra due di essi, per esempio, fra A e B, sia questo M; poi si cercherebbe fra M e C; e sia M'; indi fra M' e D, e così di seguito, come in Aritmetica.

ESERCIZI.

XXXVIII. Cercare il minimo multiplo comune delle seguenti espressioni:

1.ª $\quad 8a^2x^2y^3, \quad e \quad 12b^2x^3y^2.$

Resultato: Il M. M. C. è $24a^2b^2x^3y^3$.

2.ª $12x^2+5x-3$, e $6x^3+x^2-x$.

Resultato: Il M. M. C. è $x(2x+1)(3x-1)(4x+3)$.

3.ª $x^4-2x^3-3x^2+8x-4$, e $x^4-5x^3+20x-16$.

Resultato: Il M. M. C. è $(x^3-x^2-4x+4)(x-1)(x-4)$.

4.ª x^2-1, x^3+1, x^3-1.

Resultato: Il M. M. C. è x^6-1.

FRAZIONI ALGEBRICHE

50. Si chiama *frazione algebrica* il quoziente di due quantità qualunque, intere o frazionarie, positive o negative. — Le frazioni algebriche hanno le stesse proprietà delle frazioni aritmetiche.

51. Teorema 1.° — *Non si altera il valore d'una frazione, moltiplicando o dividendo i suoi due termini per uno stesso numero.*

Infatti, sia la frazione algebrica $\frac{a}{b}$, e sia q il suo valore.

Si ha $\frac{a}{b}=q$, oppure $a=bq$.

Moltiplicando i due membri di questa uguaglianza per una stessa quantità c, si ottiene

$$ac=bqc=bcq\,;$$

e dividendo i due membri per bc, avremo

$$\frac{ac}{bc}=\frac{bcq}{bc}=q.$$

Dunque, essendo

$$\frac{a}{b}=q, \quad \text{e} \quad \frac{ac}{bc}=q,$$

ne segue che

$$\frac{a}{b}\ \frac{ac}{bc},$$

come bisognava dimostrare.

Al modo stesso si proverebbe che,

$$\frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}.$$

52. Corollario 1.° — *Non si altera il valore d'una frazione cambiando i segni ai due termini;* giacchè è lo stesso che moltiplicarli per — 1.

Così:

$$\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b};\quad \frac{-a+b}{+c-d}=\frac{a-b}{-c+d}.$$

Ci possiamo rendere ragione di ciò anche osservando che il numeratore rappresenta il dividendo e il denominatore il divisore; ora, abbiamo visto che se il dividendo e il divisore hanno segno uguale, il quoziente è positivo, ed è negativo se il segno è disuguale; dunque, se i due termini della frazione sono positivi o negativi, il quoziente sarà positivo, e se uno dei termini è positivo e l'altro negativo, il quoziente sarà negativo.

53. Corollario 2.° — *Per ridurre due o più frazioni allo stesso denominatore, si moltiplicano i due termini di ciascuna di esse pel prodotto dei denominatori di tutte le altre.*

Così:

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{e}{m}=\frac{adm}{bdm},\ \frac{bcm}{bdm},\ \frac{bde}{bdm}.$$

54. Corollario 3.° — *Per ridurre una frazione alla sua più semplice espressione, basta dividere i suoi due termini per tutti i loro fattori comuni* (n.[i] 35 e 41).

Così:

$$\frac{a^2b^3c}{ab^2d}=\frac{abc}{d}; \qquad \frac{ax+x^2}{3bx-cx}=\frac{a+x}{3b-c}.$$

55. Corollario 4.° — *L'addizione e la sottrazione di più frazioni, si fanno riducendo queste frazioni allo stesso denominatore, e aggiungendo o sottraendo i numeratori.*

Così:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd};$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

56. Teorema 2.° — *Si fa il prodotto di due o più frazioni dividendo il prodotto dei numeratori per quello dei denominatori.*

Infatti, abbiansi le due frazioni

$$\frac{a}{b} \text{ e } \frac{c}{d},$$

e sieno q e q' i loro valori; si ha evidentemente

$$\frac{a}{b}=q, \quad \frac{c}{d}=q',$$

oppure $\qquad a=bq \quad c=dq'.$

Moltiplicando queste due uguaglianze membro a membro, si ottiene

$$ac=bdqq';$$

da cui, dividendo per bd i due membri,

$$\frac{ac}{bd}=qq'.$$

Dunque

$$\frac{ac}{bd}=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d},$$

come dovevasi dimostrare.

57. Teorema 3.° — *Si divide una quantità per una frazione, moltiplicando questa quantità per la frazione rovesciata.*

Debbasi dividere la frazione $\frac{a}{b}$ per la frazione $\frac{c}{d}$; il quoziente sarà $\frac{ad}{bc}$.

Infatti, moltiplicando questo quoziente pel divisore e riducendo, si riproduce il dividendo.

Dunque

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

58. I Teoremi precedenti dànno il modo di eseguire qualunque operazione sulle frazioni algebriche. — Ecco alcuni esempi:

1.° $$a+\frac{b}{c}+d+\frac{m}{n}=\frac{acn+bn+dcn+mc}{cn}.$$

2.° $$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)(a+b)-(a-b)(a-b)}{(a-b)(a+b)}$$
$$=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2\mp 2ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2}.$$

3.° $$\frac{2a^2-3bc}{5ab-c^2}\times\frac{2a^2-3b^2}{4ab+c^2}=\frac{(2a^2-3bc)(2a^2-3b^2)}{(5ab-c^2)(4ab+c^2)}$$
$$=\frac{4a^4-6a^2b^2-6a^2bc+9b^3c}{20a^2b^2+abc^2-c^4}.$$

4.° $$\frac{a^2-1}{a^4-b^4}:\frac{a^4+b^4}{a^2+1}=\frac{a^2-1}{a^4-b^4}\times\frac{a^2+1}{a^4+b^4}=\frac{a^4-1}{a^8-b^8}.$$

ESERCIZI.

XXXIX. Calcolare

$$\frac{m}{3a^2}+\frac{n}{6ab}+\frac{p}{12a^3}.$$

Resultato:

$$\frac{4abm+2a^2n+bp}{12a^3b}.$$

XL. Calcolare

$$\left(\frac{a^2-b^2}{a-b}\right)\times\left(\frac{c-d}{a-b}\right).$$

Resultato:

$$\frac{ac+bc-ad-bd}{a-b}.$$

XLI. Trovare la somma delle seguenti espressioni:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

Resultato: Somma = *Zero.*

XLII. Calcolare l'espressione

$$\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}:\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2}.$$

Resultato:

$$\frac{a^4-b^4}{x^4-y^4}.$$

XLIII. Ridurre alla più semplice espressione

$$\frac{12a^3b-6a^2bc}{18a^2b^2-12a^2bc+18a^3b}.$$

Resultato:

$$\frac{2a-c}{3b-2c+3a}.$$

XLIV. Verificare le seguenti uguaglianze:

$$a-b-\frac{d}{ef}-\frac{c}{eg}=\frac{(a-b)\,efg-dg-cf}{efg}.$$

$$\frac{a^2d}{3b^7c^3}-\frac{3ad}{2b^4c^2}-\frac{b^3}{cd}=\frac{2a^2d^2-9ab^3cd^2-6b^{10}c^2}{6b^7c^3d}.$$

$$1-\frac{a^3}{x^3}:\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x^3}=x^2+ax+a^2.$$

$$\frac{3a+b+x}{5a}-\frac{2a+b}{3b}+\frac{7a-2b}{9a}=\frac{47ab-b^2+9bx-30a^2}{45ab}.$$

$$\frac{3h}{(h-2x)^2}+\frac{2h+x}{(h+x)(h-2x)}-\frac{5}{h+x}=\frac{20hx-22x^2}{(h+x)(h-2x)^2}.$$

$$\frac{2}{x^2-9x-10}+\frac{3}{x^2-7x-30}-\frac{5}{x^2+4x+3}$$
$$=\frac{59}{(x-10)(x+1)(x+3)}.$$

$$\frac{12x^2-15xy+3y^2}{6x^3-6x^2y+2xy^2-2y^3}=\frac{3(4x-y)}{2(3x^2+y^2)}.$$

$$\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{18x^4+12x^3-43x^2+36x-18}{144}.$$

$$\left(\frac{3x^5}{4}-4x^4+\frac{77}{8}x^3-\frac{43}{4}x^2-\frac{33}{4}x+27\right):\left(\frac{x^2}{2}-x+3\right)$$
$$=\frac{6x^3-20x^2+x+36}{4}.$$

$$\frac{1}{2+3x}+\frac{2x-5}{(2+3x)^2}+\frac{x^2-x+6}{(2+3x)^3}=\frac{2x}{1+x^2+x^4}.$$

XLV. Semplificare l'espressione

$$\frac{14a^2-7ab}{10ac-5bc},$$

e ridurre il resultato ad un numero facendo $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$.

Resultato : $$\frac{7a}{5c} = 2 + \frac{4}{5}.$$

XLVI. Semplificare l'espressione

$$\frac{n^3 - 2n^2}{n^2 - 4n + 4},$$

e ridurre il resultato ad un numero, facendo $n = 100$.

Resultato : $$102 + \frac{2}{49}.$$

XLVII. Semplificare l' espressione

$$\frac{x^2 - a^2}{x^2 - 2ax + a^2}.$$

Resultato: $$\frac{x + a}{x - a}.$$

XLVIII. Verificare le uguaglianze

$$\frac{12a^3b - 6a^2bc}{18a^2b^2 - 12a^2bc + 18a^3b} = \frac{2a - c}{3b - 2c + 3a}.$$

$$\frac{ac^3 - bc^5 - c^7}{3bc^2 + c^4} = \frac{ac - bc^3 - c^5}{3b + c^2}.$$

$$\frac{21a^3b^2c - 9ab^3c^2}{15a^2b^2c + 3a^5b^4c^2 - 12ab^3c} = \frac{7a^2 - 3bc}{5a + a^4b^2c - 4}.$$

$$\frac{9x^3 + 53x^2 - 9x - 18}{x^2 + 11x + 30} = \frac{9x^2 - x - 3}{x + 5}.$$

$$\frac{2x^3 + 3x^2 + x}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{2x + 1}{x - 2}.$$

$$\frac{a^2 - 3ab + ac + 2b^2 - 2bc}{a^2 - b^2 + 2bc - c^2} = \frac{a - 2b}{a + b}.$$

$$\frac{16ab^2c^2 - 8b^3c^2 - 6a^2bc^2}{6a^2b^2c^2 - 8a^3bc^2 + 4b^4c^2 + 18ab^3c^2} = \frac{3a - 2b}{4a^2 + 5ab + b^2}.$$

Potenze e radici dei monomi.

59. Innalzare una quantità a ad una potenza m, significa formare un prodotto di m fattori eguali ad a.

Così: *innalzare alla terza potenza*, o *al cubo*, la quantità rappresentata da x, significa formare un prodotto di *tre* fattori uguali ad x, e si ha $x^3 = xxx$.

60. Reciprocamente: estrarre la radice m da una potenza a, significa cercare la quantità che innalzata alla potenza m, riproduca a.

Così: *estrarre la radice terza* o *cubica* dalla quantità rappresentata da x^3, significa cercare quella quantità che innalzata alla 3.ª potenza riproduca x^3; e si ha

$$\sqrt[3]{x^3} = x.$$

61. Le regole per la formazione delle potenze e per l'estrazione delle radici dipendono da quelle che abbiamo date per la Moltiplicazione e Divisione algebriche.

62. Regola I. — *Per innalzare un monomio alla potenza* m^esima^*, bisogna innalzare il suo coefficiente a questa potenza, e moltiplicare gli esponenti per* m*, vale a dire pel grado, o esponente, della potenza.*

Sia il monomio $(7a^3b^2c)^3$; l'operazione si riduce alla seguente:

$$7a^3b^2c \times 7a^3b^2c \times 7a^3b^2c;$$

e per la regola di moltiplicazione (n.° 22), si ha:

$$343a^{3+3+3} \times b^{2+2+2} \times c^{1+1+1};$$

ovvero

$$343a^{3.3} \times b^{2.3} \times c^{1.3} = 343a^9b^6c^3.$$

63. Dal che si deduce *che l'emmesima potenza d'un prodotto è uguale al prodotto dell'*emmesime *potenze dei fattori.*

Così:

$$(3\times2^3\times5\times6^2)^4=3^4\times2^{12}\times5^4\times6^8.$$

64. Reciprocamente: *per estrarre la radice* m^{esima} *da un monomio, bisogna estrarre la radice* m^{esima} *dal coefficiente, e dividere gli esponenti per* m.

Ciò perchè l'estrazione o la ricerca d'una radice convien che sia operazione inversa all'innalzamento a potenza.

Debbasi, ad esempio, estrarre la radice cubica da $343a^9b^6c^3$.

Avremo:

$$\sqrt[3]{343a^9b^6c^3}=\sqrt[3]{343}\,.\,a^{9:3}\,.\,b^{6:3}\,.\,c^{3:3}=7a^3b^2c.$$

65. Da ciò si deduce evidentemente *che la radice* m^{esima} *d'un prodotto è uguale al prodotto delle radici* m^{esime} *dei fattori.*

Così:

$$\sqrt{40}=\sqrt{8}\times\sqrt{5}=\sqrt{4}\times\sqrt{10};$$

$$\sqrt[n]{mnpr}=\sqrt[n]{m}\times\sqrt[n]{n}\times\sqrt[n]{p}\times\sqrt[n]{r}.$$

66. Talvolta gli esponenti non sono divisibili per l'indice della radice, e spesso non può estrarsi esattamente la radice dal coefficiente; in tali casi si opera come segue:

Abbiasi l'espressione

$$\sqrt{32a^3b^4c}.$$

L'esponente 3 di a non è divisibile per 2; di più non si può estrarre esattamente la radice quadrata da

32: in questo caso si decompone, se è possibile, il quadrato totale in due prodotti, di cui uno si presti all'operazione, e si lascia l'altro qual è, indicando l'operazione; così:

$$\sqrt{32a^3b^2c} = \sqrt{16a^2b^2 \times 2ac.}$$

Ora si può estrarre la radice quadrata da $16a^2b^2$, che è $4ab$; e la radice totale sarà

$$4ab \times \sqrt{2ac.}$$

Dunque

$$\sqrt{32a^3b^2c} = \sqrt{16a^2b^2 \times 2ac} = 4ab \sqrt{2ac.}$$

67. Talvolta si trovano ancora espressioni di questa forma

$$\sqrt{-25.}$$

Queste si chiamano *quantità immaginarie*, perchè *nessun quadrato può avere il segno* —.

Infatti, se la quantità che si vuole innalzare al quadrato ha il segno +, il quadrato avrà il segno +; se ha il segno —, il quadrato avrà sempre il segno +, come prodotto di due quantità affètte da segno uguale (n.° 22 — I.); per conseguenza, qualunque espressione affètta dal segno — non può essere un quadrato, e non se ne può estrarre la radice quadrata. Nonostante tali espressioni si trovano in Algebra, e vi si usano coll'unico divisamento di poter conservare la generalità delle teorie.

Abbiam detto (n.° 65) che la radice m^{esima} d'un prodotto è uguale al prodotto delle radici m^{esime} dei fattori; onde $\sqrt{-25}$ può scriversi così: $\sqrt{25(-1)}$; giacchè eseguendo il prodotto sotto al segno radicale si ottiene — 25. Si estrae dunque la radice

quadrata da 25, poi s' indica quella di -1, e si ha:

$$\sqrt{-25}=\sqrt{25\,(-1)}=\pm 5\times\sqrt{-1};$$

e in questo caso il numero 5 si chiama *il coefficiente* di $\sqrt{-1}$ (1). Abbiamo posto avanti al 5 il doppio segno $\pm$, perchè un quadrato essendo sempre positivo, può nascere da un prodotto di due fattori positivi o negativi.

68. *Qualunque sia il segno d'una quantità, le sue potenze* pari *sono sempre positive, e le sue potenze* impari *hanno lo stesso segno di essa quantità.*

Così:

$$(-a)^6=(-a)\,(-a)\,(-a)\,(-a)\,(-a)\,(-a);$$

e prendendo questi fattori due a due, si ha

$$(-a)\,(-a)=+a^2,$$

e via di seguito; in guisa che si ottiene

$$a^2\times a^2\times a^2=a^6.$$

Ma se si avesse $(-a^5)$, cioè un fattore di meno, non resterebbe che

$$a^2\times a^2\times -a,\quad \text{cioè}\quad a^4\times -a=-a^5.$$

69. Le estrazioni di radici che non possono eseguirsi danno origine ad *esponenti frazionari.*

Abbiasi

$$\sqrt[5]{a^3}.$$

In virtù della regola (n.° 64) si ha

$$\sqrt[5]{a^3}=a^{3:5};\ \text{ma}\ \ 3:5=\frac{3}{5};$$

dunque $a^{3:5}=a^{\frac{3}{5}}$, e per conseguenza $\sqrt[5]{a^3}=a^{\frac{3}{5}}$.

(1) In generale, dicesi *coefficiente di un radicale* qualunque quantità che lo preceda e che lo moltiplichi.

Dunque gli esponenti frazionarî hanno per origine un' estrazione di radice che non può eseguirsi, e che dicesi *quantità incommensurabile* o *irrazionale.*

Così :

$$\sqrt[3]{a^5b^7} = a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{7}{3}}.$$

Dal che si deduce che quando l'esponente di qualche lettera sotto al radicale non è divisibile per l' indice della radice, questo esponente si dovrà porre sotto la forma di frazione nella radice.

ESEMPI:

$$\sqrt{a^2} = \pm a;\ \sqrt{9a^6b^4} = \pm 3a^3b^2;\ \sqrt[3]{a^3} = a;\ \sqrt[3]{-a^3} = -a;$$

$$\sqrt[3]{125x^3y^6} = 5xy^2;\quad \sqrt[4]{b^4} = \pm b;\quad \sqrt[4]{16a^4x^{12}} = \pm 2ax^3;$$

$$\sqrt[n]{a^rb^s} = a^{\frac{r}{n}}b^{\frac{s}{n}};\quad \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}};\quad \sqrt[5]{b^3c} = b^{\frac{3}{5}}c^{\frac{1}{5}}.$$

70. Regola II. — *Per innalzare una quantità frazionaria ad una potenza qualunque, bisogna innalzare a questa potenza il numeratore ed il denominatore.*

Così :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Infatti,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \frac{a^2}{b^2}.$$

71. Reciprocamente : *per estrarre una radice qualunque da una quantità frazionaria, bisogna estrarre questa radice dal numeratore e dal denominatore.*

Così :

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \pm \frac{a}{b},$$

e ciò perchè l'estrazione di radice è l'operazione inversa all'innalzamento a potenza.

ESEMPI:

$$\left(\frac{3a^2x}{4by^3}\right)^3 = \frac{27a^6x^3}{64b^3y^9}; \quad \left(\frac{abc}{m}\right)^n = \frac{a^nb^nc^n}{m^n};$$

$$\sqrt{\frac{25a^4x^2}{9b^2y^6}} = \pm\frac{5a^2x}{3by^3}; \quad \sqrt[n]{\frac{a^rb^x}{c^m}} = \frac{a^{\frac{r}{n}}b^{\frac{x}{n}}}{c^{\frac{m}{n}}}.$$

ESERCIZI.

XLIX. Calcolare le seguenti espressioni:

$$(5ab)^2; \quad (4a^2cd)^2; \quad \left(\frac{3}{4}a^3b^2c\right)^2.$$

Resultato:

$$25a^2b^2; \quad 16a^4c^2d^2; \quad \frac{9}{16}a^6b^4c^2.$$

L. Calcolare

$$(8a^2b)^3; \quad (2a^3bc^2)^4; \quad (10abcd)^n.$$

Resultato:

$$512a^6b^3; \quad 16a^{12}b^4c^8; \quad 10^na^nb^nc^nd^n.$$

LI. Calcolare

$$\sqrt{9a^2c^2d^4}; \quad \sqrt{4a^2b^4c^6}; \quad \sqrt{12a^2bc}.$$

Resultato:

$$3acd^2; \quad 2ab^2c^3; \quad 2a\sqrt{3bc}.$$

LII. Calcolare

$$\sqrt[3]{27a^6b^3c^6}; \quad \sqrt{32a^2bc^4}; \quad \sqrt{-49}.$$

Resulato:

$$3a^2bc^2; \quad 4ac^2\sqrt{2b}; \quad \pm 7\sqrt{-1}.$$

LIII. Calcolare

$$\sqrt[3]{a^7b^5};\qquad \sqrt[4]{ab^3};\qquad \sqrt[m]{a^rb^n};\qquad \sqrt{a^5b^3}.$$

Resultato :

$$a^{\frac{7}{3}}b^{\frac{5}{3}};\qquad a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}};\qquad a^{\frac{r}{m}}b^{\frac{n}{m}};\qquad a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{3}{2}}.$$

LIV. Calcolare

$$\left(\frac{2a^3m}{4by^2}\right)^3;\qquad \sqrt{\frac{16a^6b^2}{9b^4c^2}};\qquad \sqrt[3]{\frac{a^6b^3}{c^3}}.$$

Resultato :

$$\frac{a^9m^3}{8b^3y^6};\qquad \frac{4a^3b}{3b^2c};\qquad \frac{a^2b}{c}.$$

LV. Verificare le uguaglianze

$$\sqrt{12a^7b^4c^3}=2a^3b^2c\sqrt{3ac};$$

$$\sqrt{6a^8b^{10}}=a^4b^5\sqrt{6};\qquad \sqrt[3]{8a^5b^7}=2a^{\frac{5}{3}}b^{\frac{7}{3}}.$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^5}{5b^{10}}}=\frac{a}{2b^2};\qquad \sqrt[3]{-\frac{216a^3b^9}{125c^6}}=-\frac{6ab^3}{5c^2}$$

Potenze e radici dei polinomi.

Quadrato d'un binomio e d'un polinomio.

72. Teorema 1.º — *Il quadrato d'un binomio contiene il quadrato del primo termine, più il doppio del prodotto del primo pel secondo termine, più il quadrato del secondo.*

Abbiasi il binomio $a+b$. Il suo quadrato è

$$a^2+2ab+b^2.$$

Infatti (n.° 29 — 4.°),

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a.a+a.b+a.b+b.b$$
$$=a^2+2ab+b^2.$$

73. Corollario 1°. — Facendo $b=1$, l'uguaglianza precedente diviene $(a+1)^2=a^2+2a+1$; vale a dire: *che quando un numero aumenta di un'unità, il suo quadrato aumenta del doppio di questo numero più 1*; o, in altre parole, *la differenza fra i quadrati di due numeri interi consecutivi è uguale al doppio del minore più 1.*

74. Corollario 2.° — Facendo $b=\frac{1}{2}$; si ha

$$\left(a+\frac{1}{2}\right)^2=a^2+a+\frac{1}{4};$$

vale a dire che *quando un numero aumenta di una mezza unità, il suo quadrato aumenta di questo numero più* $\frac{1}{4}$.

75. Teorema 2.° — *Il quadrato d'un polinomio contiene il quadrato del primo termine, più il doppio del prodotto del primo termine pel secondo, più il quadrato del secondo; più il doppio del prodotto della somma dei due primi termini pel terzo, più il quadrato del terzo; più il doppio del prodotto della somma dei tre primi termini pel quarto, più il quadrato del quarto*, ecc.

Sia il trinomio $a+b+c$; il suo quadrato è

$$a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2.$$

Infatti, il trinomio $a+b+c$ può decomporsi così:

$$(a+b)+c;$$

e pel primo teorema:

$$[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2.$$

Ma $\qquad (a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$

sostituendo questo valore nel secondo membro dell'uguaglianza precedente, si ha:

$$(a+b)^2+2(a+b)c+c^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2,$$

il che era da dimostrare.

76. Corollario 1.° — Applicando il teorema precedente al polinomio $(a+b+c+d)$, si otterrà:

$$a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2;$$

ed eseguendo le operazioni indicate, troveremo:

$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$
$$+2ad+2bd+2cd+d^2.$$

Dal che si deduce che *il quadrato d'un polinomio qualunque contiene la somma dei quadrati di tutti i suoi termini, più due volte la somma di ciascuno dei prodotti di questi termini presi due a due.*

Questa legge può servire ad innalzare un polinomio qualunque al quadrato, senza ricorrere alla moltiplicazione. — Ecco alcuni esempi:

1.° $$(5a+2b)^2=(5a)^2+(2b)^2+2(5a)(2b)$$
$$=25a^2+4b^2+20ab.$$

2.° $$(3a^2-2b^2c)^2=(3a^2)^2+(-2b^2c)^2+2(3a^2)(-2b^2c)$$
$$=9a^4+4b^4c^2-12a^2b^2c.$$

3.° $$(a^2-2b+3)^2=(a^2)^2+(-2b)^2+3^2+2a^2(-2b)$$
$$+2a^2.3+2(-2b)3=a^4+4b^2+9-4a^2b+6a^2-12b.$$

77. Corollario 2.° — *Quando ad un polinomio si aggiunge un nuovo termine, il suo quadrato aumenta del doppio del prodotto di tutti gli altri per questo nuovo termine, più il quadrato di esso.*

Infatti,

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2;$$
$$(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2;$$
$$(a+b+c+d)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2$$
$$+2(a+b+c)d+d^2;\text{ ecc.}$$

ESERCIZI

LVI. Verificare le uguaglianze:

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz.$$

$$(5x+2y)^2 = 25x^2+4y^2+20xy.$$

$$(3x^2-2y^2z)^2 = 9x^4-12x^2y^2z+4y^4z^2.$$

$$(x^2-2y+3)^2 = x^4+4y^2+9-4x^2y+6x^2-12y.$$

$$(p-q+r-s)^2 = p^2+q^2+r^2+s^2+2pr+2qs-2pq$$
$$-2ps-2qr-2rs.$$

$$(3a-2b+c^2)^2 = 9a^2+4b^2+c^4-12ab+6ac^2-4bc^2.$$

$$(3x-2y-z^3)^2 = 9x^2+4y^2+z^6-12xy+4yz^3.$$

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{xy}{3}.$$

LVII. Fare lo sviluppo di $(a+b+c+d)^2$, e ridurre il resultato in numero, facendo

$$a=2,\ b=3,\ c=4,\ d=5.$$

Resultato: 196.

Cubo d'un binomio e d'un polinomio.

78. Teorema 1.° — *Il cubo d'un binomio contiene il cubo del primo termine, più il triplo del prodotto del quadrato del primo termine pel secondo, più il triplo del prodotto del primo termine pel quadrato del secondo, più il cubo del secondo.*

Abbiasi il binomio $a+b$; il suo cubo è

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Infatti,

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^2(a+b)$$
$$= (a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

79. Corollario 1.° — Facendo $b=1$, l'uguaglianza precedente diviene

$$(a+1)^3 = a^3+3a^2+3a+1;$$

vale a dire che *quando un numero aumenta di un'unità, il suo cubo aumenta del triplo del quadrato di questo numero, più 3 volte lo stesso numero, più 1*; o in altre parole, *la differenza fra i cubi di due numeri interi consecutivi è uguale al triplo del quadrato del minore; più il triplo dello stesso numero, più 1.*

80. Teorema 2.° — *Il cubo d'un polinomio contiene la somma dei cubi de' suoi termini, più il triplo della somma dei prodotti ottenuti moltiplicando successivamente il quadrato d'un termine per ciascuno degli altri termini, più sei volte la somma dei prodotti de' suoi termini presi tre a tre.*

Abbiasi il trinomio $a+b+c$; il suo cubo è

$$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+3ac^2+3b^2c$$
$$+3bc^2+6abc.$$

Infatti, il trinomio $a+b+c$ può decomporsi così: $a+(b+c)$; e pel teorema precedente:

$$[a+(b+c)]^3=a^3+3[a^2(b+c)]+3[a(b+c)^2]+(b+c)^3;$$

e sviluppando, troveremo:

$$a^3+3a^2b+3a^2c+3a(b^2+2bc+c^2)+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3.$$

ovvero $\quad a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6abc+3ac^2$

$$+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3,$$

che è resultato sopra enunciato.

81. Corollario 2.° — Se avessimo il polinomio $a+b+c+d$, per innalzarlo al cubo basterebbe cambiare nel resultato trovato c in $c+d$, e si avrebbe

$$(a+b+c+d)^3=a^3+3a^2b+3a^2(c+d)+3ab^2$$
$$+6ab(c+d)+3a(c+d)^2+b^3+3b^2(c+d)$$
$$+3b(c+d)^2+(c+d)^3$$
$$=a^3+3a^2b+3a^2c+3a^2d+3ab^2+6abc+6abd$$
$$+3ac^2+6acd+3ad^2+b^3+3b^2c+3b^2d+3bc^2$$
$$+6bcd+3bd^2+c^3+3c^2d+3cd^2+d^3,$$

che è il cubo richiesto.

In modo analogo potrà aversi il cubo d'un polinomio qualunque.

ESERCIZI.

LVIII. Verificare le uguaglianze:

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

$$(2a^2+3b)^3=8a^6+36a^4b+54a^2b^2+27b^3.$$

$$(5a^3-bc)^3=125a^9-75a^6bc+15a^3b^2c^2-b^3c^3.$$

$$(1-2x+3x^2)^3=1-6x+21x^2-44x^3$$
$$+63x^4-54x^5+27x^6.$$

LIX. Fare lo sviluppo dell'espressione $(x+y+z)^3$, e ridurre il resultato in numero, facendo

$$x=5,\quad y=4,\quad z=3.$$

Resultato: 1728.

LX. Enunciare il teorema espresso dalla formula del primo di questi esercizi.

Potenza qualunque d'un polinomio.

82. Propriamente parlando, per innalzare un polinomio ad una potenza qualunque, bisognerebbe moltiplicarlo per sè stesso tante volte meno una, quante sono le unità dell'esponente.

Cosicchè sarebbe

$$(a+b)^4=(a+b)\,(a+b)\,(a+b)\,(a+b).$$

E sviluppando:

$$(a+b)\,(a+b)=a^2+2ab+b^2;$$

$$(a^2+2ab+b^2)(a+b) = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

$$(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)$$
$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Onde

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Ma se per giungere ad una potenza molto elevata altro mezzo non avessimo se non quello di passare per tutte le potenze inferiori, è chiaro che il calcolo riuscirebbe molto laborioso, e quasi impossibile. In questo proposito non mancano le opportune facilitazioni, giacchè nell' ultimo secolo fu scoperta intorno alla formazione delle potenze una legge fissa ed invariabile, in virtù della quale si possono formare i termini successivi d'una potenza qualunque d'un binomio semplice (1), senza aver bisogno di passare per le potenze intermedie. Fu Newton lo scopritore di questa legge, che poi si applica allo sviluppo d'ogni potenza di qualsiasi polinomio; essa è generalmente conosciuta sotto il nome di *formula del binomio newtoniano*. — Noi ci limiteremo per ora a farne conoscere i resultati, dandone in seguito la dimostrazione.

83. Per innalzare un binomio semplice ad una potenza qualunque, bisogna osservare: 1.° *la regola dei segni; 2.° la regola delle lettere e degli esponenti; 3.° la regola dei coefficienti.*

I. **Regola de' segni.** — Se i due termini del binomio sono positivi, tutti i termini delle sue potenze saranno positivi; e se uno dei termini è negativo, i termini saranno alternativamente positivi e negativi.

(1) Intendi per *binomio semplice* quello costituito di due quantità letterali aventi per coefficiente e per esponente l'unità.

II. **Regola delle lettere e degli esponenti.** — Ogni termine della potenza è il prodotto dei due termini del binomio, affètti ciascuno da un esponente che varia ad ogni termine. — Nel primo termine della potenza, il primo termine del binomio ha per esponente l'esponente stesso della potenza, e il secondo termine ha l'esponente *zero*. Nei termini seguenti l'esponente del primo termine del binomio diminuisce successivamente di un' unità sino a che diviene *zero*, mentre l'esponente del secondo termine aumenta successivamente di un'unità, sino a che uguaglia quello della potenza.

Così, per innalzare $a+b$ alla *sesta* potenza, fatta astrazione dai coefficienti, si scriverà (n.° 32):

$$a^6b^0+a^5b^1+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+a^1b^5+a^0b^6.$$

Dalla legge degli esponenti si può dedurre che nello sviluppo d'una potenza del binomio vi sarà un termine di più del numero d' unità contenute nell' esponente della potenza.

III. **Regola de' coefficienti.** — È quella scoperta da Newton. — Per trovare il coefficiente d'un termine qualunque della potenza d'un binomio semplice $a+b$, si moltiplica il coefficiente del termine precedente per l'esponente di a in questo termine, e si divide il prodotto pel numero che indica il posto di questo termine precedente; il quoziente sarà sempre il coefficiente richiesto.

Esempio. — Domandasi lo sviluppo della *sesta* potenza di $a+b$.

Avremo:

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

Dal che si vede che il coefficiente del quarto ter-

mine, per esempio, è uguale al coefficiente del terzo, moltiplicato per l'esponente di a in questo termine, e diviso per 3, perchè $20 = \frac{15 \times 4}{3}$.

Si osservi che la somma di tutti i coefficienti nello sviluppo dell'*ennesima* potenza d'un binomio semplice è uguale a 2 all'*ennesima* potenza. — Così nell'esempio precedente la somma di tutti i coefficienti è $2^6 = 64$.

Si osservi inoltre che i termini equidistanti dagli estremi hanno egual coefficiente.

84. Queste regole sono generali e non soffrono eccezione; talchè per innalzare $a + b$ alla potenza indeterminata n, avremo la formula seguente:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}a^{n-3}b^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}a^{n-4}b^4$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5}a^{n-5}b^5 + \ldots\ldots$$

...... e così via di seguito, sino all' ultimo termine, che sarà

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ldots\ldots\ldots 1}{1.2.3.4.5\ldots\ldots\ldots(n-1).n}b^n = b^n.$$

85. Volendo applicare questa formula a casi particolari, bisognerà dare ad n valori particolari, e continuare la formula sino a che si trovi un coefficiente uguale a *zero*, il che accadrà quando avremo un numero di termini uguale ad $n + 1$ (n.º 83 — II.)

Esempio. — Sia $n = 5$. — La formula generale diverrà:

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+\frac{5\times4}{1\times2}a^3b^2+\frac{5\times4\times3}{1\times2\times3}a^2b^3$$
$$+\frac{5\times4\times3\times2}{1\times2\times3\times4}ab^4+\frac{5\times4\times3\times2\times1}{1\times2\times3\times4\times5}b^5.$$

E facendo le riduzioni, troveremo:

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

86. Se si trattasse della potenza qualunque d'un binomio composto, come $2cx^2+3d^2y$, sostituendo $2cx^2$ ad a, e $3d^2y$ a b, si avrebbe, per esempio:

$$(2cx^2+3d^2y)^3=(2cx^2)^3+3(2cx^2)^2\times3d^2y$$
$$+3(2cx^2)(3d^2y)^2+(3d^2y)^3.$$

Ciò fatto, bisognerebbe sviluppare ogni termine, secondo le regole ordinarie della moltiplicazione.

87. Le stesse leggi servono per innalzare un trinomio, un quadrinomio, in generale, un polinomio qualunque ad una potenza data, come resulta dai seguenti esempi.

1.° Debbasi innalzare alla quarta potenza il trinomio

$$(2+3+5).$$

Applicando la formula, avremo:

$$(2+3+5)^4=(2+3)^4+4(2+3)^3(5)+6(2+3)^2(5)^2$$
$$+4(2+3)(5)^3+5^4=10000.$$

Infatti,

$$(2+3+5)^4=10^4=10000.$$

2.° Vogliasi calcolare l'espressione $(2a^2-3ab)^5$.

Si farà $2a^2=p$, e $3ab=q$; e sviluppando, troveremo:

$$(p-q)^5=p^5-5p^4q+10p^3q^2-10p^2q^3+5pq^4-q^5.$$

Sostituendo in questo sviluppo a p e a q i loro valori, si otterrà:

$$32a^{10}-5.16a^8.3ab+10.8a^6.9a^2b^2-10.4a^4.27a^3b^3$$
$$+5.2a^2.81a^4b^4-243a^5b^5.$$

Finalmente, eseguendo le operazioni indicate, si avrà:

$$32a^{10}-240a^9b+720a^8b^2-1080a^7b^3$$
$$+810a^6b^4-243a^5b^5.$$

3.° Debbasi calcolare l'espressione $(p+q+r)^4$.

Facciamo $(p+q)=a$, $r=b$, ed avremo:

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

Sostituendo ad a e a b i loro valori, troveremo:

$$(p+q+r)^4=(p+q)^4+4(p+q)^3r+6(p+q)^2r^2$$
$$+4(p+q)r^3+r^4.$$

E sviluppando ciascun termine:

$$(p+q+r)^4=p^4+4p^3q+6p^2q^2+4pq^3+q^4$$
$$+4(p^3+3p^2q+3pq^2+q^3)r+6(p^2+2pq+q^2)r^2$$
$$+4(pr^3+qr^3)+r^4=p^4+4p^3q+6p^2q^2+4pq^3+q^4$$
$$+4p^3r+12p^2qr+12pq^2r+4q^3r+6p^2r^2+12pqr^2$$
$$+6q^2r^2+4pr^3+4qr^3+r^4.$$

In modo analogo si sviluppa una potenza qualunque d'un polinomio proposto.

ESERCIZI.

LXI. Verificare le seguenti uguaglianze:

$$(a-b)^7=a^7-7a^6b+21a^5b^2-35a^4b^3$$
$$+35a^3b^4-21a^2b^5+7ab^6-b^7.$$

$$(1+x)^{11}=1+11x+55x^2+165x^3+330x^4+462x^5$$
$$+462x^6+330x^7+165x^8+55x^9+11x^{10}+x^{11}.$$

$$(5-4x)^4=625-2000x+2400x^2-1280x^3+256x^4.$$

$$(3-2x^2)^6=729-2916x^2+4860x^4-4320x^6$$
$$+2160x^8-576x^{10}+64x^{12}.$$

$$(a+2b-c)^3=a^3+6a^2b-3a^2c+12ab^2-12abc$$
$$+3ac^2+8b^3+6bc^2-12b^2c-c^3.$$

LXII. Fare lo sviluppo di $(a+b)^8$, e ridurre il resultato in numero, facendo $a=10$, $b=5$.

Resultato: 2562890625.

Radice quadrata dei polinomi.(1)

88. La regola per estrarre la radice quadrata da un polinomio si deduce dai principii precedenti sulla formazione delle potenze algebriche.

Esempio 1.° — Debbasi estrarre la radice quadrata dal trinomio

$$a^2 + 2ax + x^2.$$

In primo luogo osserveremo che se questo trinomio è un quadrato, la sua radice dev'essere un binomio (n.° 72).

In secondo luogo è evidente che il primo dei tre termini (a^2) dev'essere il quadrato della prima parte del binomio cercato; che il secondo ($2ax$) dev'essere il doppio del prodotto delle due parti di questo binomio, e che il terzo (x^2) dev'essere il quadrato della seconda parte.

Troveremo dunque il primo termine della radice, estraendo la radice quadrata da a^2, che è a. Sottraendo il suo quadrato a^2 dal trinomio proposto, resta

$$2ax + x^2.$$

Ma poichè $2ax$ dev'essere il doppio del prodotto della prima parte a della radice per la seconda, bisognerà per conoscere questa seconda parte dividere $2ax$

(1) Per le radici quadrate e cubiche dei numeri vedasi il *Trattato d'Aritmetica* dello stesso Autore.

per $2a$; il quoziente $+x$ la fa conoscere; perchè se x è il secondo termine della radice, sottratto dal resto trovato il suo prodotto per $2a$ col suo quadrato x^2, non deve esservi resto. Ora, per aver questo prodotto e questo quadrato si moltiplica $(2a+x)$ per x e si ha $2ax+x^2$. Fatta la sottrazione, non vi è resto; dunque $a+x$ è la radice cercata.

Ecco come si dispone in pratica l'operazione:

Operazione.

$$\begin{array}{lrr|l} & a^2+2ax+x^2 & & a+x \\ & -a^2 & & \overline{2a+x} \\ \hline 1.^\circ \text{ resto}\ldots\ldots & 2ax+x^2 & & +x \\ & -2ax-x^2 & & \\ \hline 2.^\circ \text{ resto}\ldots\ldots\ldots & 0 \quad 0 & & \end{array}$$

Esempio 2.° — Vogliasi estrarre la radice quadrata dal polinomio

$$x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9.$$

Il primo termine della radice è x^2, e sottratto da questo polinomio il quadrato x^4 della radice, si ha per resto

$$-4x^3 + 10x^2 - 12x + 9.$$

Per trovare il secondo termine della radice, si dividerà il primo termine del resto precedente pel doppio $2x^2$ del primo termine della radice; si avrà per quoziente $-2x$, che è il secondo termine della radice: ora, moltiplicando questo secondo termine per sè stesso e pel doppio del primo, si ha il prodotto

$$-2x(2x^2-2x) = -4x^3 + 4x^2,$$

il quale sottratto dal primo resto, dà

$$6x^2 - 12x + 9.$$

Questo secondo resto non essendo *zero*, la radice cercata non sarà formata di soli due termini: per trovare il terzo dovremo considerare i due già trovati come la prima parte della radice, e dividere perciò l'ultimo resto pel doppio di questa prima parte: il quoziente è 3. Si moltiplica questo quoziente per sè stesso e pel doppio dei due primi termini della radice, e si sottrae il prodotto dall'ultimo resto; si ha per resultato *zero*, e perciò i tre termini x^2-2x+3 formano la radice cercata.

Operazione.

	$x^4-4x^3+10x^2+12x+9$	x^2-2x+3
	$-x^4$	
1.° resto ...	$-4x^3+10x^2-12x+9$	$2x^2-2x$
	$+4x^3-\ 4x^2$	$-2x$
2.° resto ...	$6x^2-12x+9$	$2x^2-4x+3$
	$-6x^2+12x-9$	3
3.° resto ...	$0 \quad 0 \quad 0$	

89. Dai due esempi precedenti può ricavarsi la seguente

Regola. — *Per estrarre la radice quadrata da un polinomio, bisogna, dopo averlo ordinato, cercare la radice quadrata del suo primo termine, la quale sarà il primo termine della radice; togliere poi dal polinomio proposto il quadrato del primo termine della radice, e dividere il primo termine del resto pel doppio del primo termine della radice, e così avremo il suo secondo termine; togliere dal primo resto il doppio del prodotto del primo termine pel secondo e il quadrato del secondo; dividere ancora il primo termine del secondo resto pel doppio del primo termine della radice, e così si ha il suo terzo termine; togliere dal secondo resto il doppio del prodotto ottenuto*

moltiplicando la somma dei due primi termini della radice pel terzo, più il quadrato del terzo; dividere ugualmente il primo termine del terzo resto pel doppio del primo termine della radice, il che dà il suo quarto termine, e così di seguito.

Esempio 3.º — Debbasi estrarre la radice quadrata da

$$4a^6-12a^5b+25a^4b^2-44a^3b^3+46a^2b^4-40ab^5+25b^6.$$

Operazione.

	$4a^6-12a^5b+25a^4b^2-44a^3b^3+46a^2b^4-40ab^5+25b^6$	$2a^3-3a^2b+4ab^2-5b^3$
	$-4a^6$	
1.º resto	$-12a^5b+25a^4b^2-44a^3b^3+46a^2b^4-40ab^5+25b^6$	$4a^3-3a^2b$
	$+12a^5b-9a^4b^2$	$-3a^2b$
2.º resto	$16a^4b^2-44a^3b^3+46a^2b^4-40ab^5+25b^6$	$4a^3-6a^2b+4ab^2$
	$-16a^4b^2+24a^3b^3-16a^2b^4$	$+4ab^2$
3.º resto	$-20a^3b^3+30a^2b^4-40ab^5+25b^6$	$4a^3-6a^2b+8ab^2-5b^3$
	$+20a^3b^3-30a^2b^4+40ab^5-25b^6$	$-5b^3$
	$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$	

90. Di rado il polinomio, dal quale si vuole estrarre la radice quadrata, è un quadrato; tale non è quando si presenta una delle seguenti circostanze:

I. Se il polinomio ordinato per una lettera contiene nel suo primo e nel suo ultimo termine questa lettera con un esponente impari.

II. Se nel corso dell' operazione si giunge ad un resto, il cui primo termine contiene la lettera principale con un esponente minore di quello della stessa lettera nel primo termine della radice; perchè allora non si potrà dividere il primo termine di questo resto pel doppio del primo termine della radice.

III. Se devesi mettere in radice un termine in cui l'esponente della lettera principale sia minore della metà dell' esponente di questa lettera nell' ultimo termine del polinomio proposto; perchè il quadrato di quest' ultimo termine della radice non sarebbe uguale all' ultimo termine del polinomio dato, come è necessario che esso sia.

ESERCIZI.

LXIII. Verificare le seguenti uguaglianze:

$$\sqrt{a^2-2ab+b^2}=a-b.$$

$$\sqrt{a^2-ab+\frac{b^2}{4}}=a-\frac{b}{2}.$$

$$\sqrt{x^2+2x-1}=x+1.$$

$$\sqrt{a^6+6a^3x^4+9x^8}=a^3+3x^4.$$

$$\sqrt{a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2}=a+b+c.$$

$$\sqrt{4x^4+8ax^3+4a^2x^2+16b^2x^2+16ab^2x+16b^4}$$
$$=2x^2+2ax+4b^2.$$

$$\sqrt{9x^2-30ax-5a^2x+25a^2+5a^3+\frac{a^4}{4}}=3x-5a-\frac{a^2}{2}.$$

$$\sqrt{9x^2-6ab+30ac+6ad+b^2-10bc-2bd+25c^2+10cd+d^2}$$
$$=3a-b+5c+d.$$

Radice d'un grado qualunque.

91. La formula del binomio ci mostra che

$$(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}b^2+\ldots\ldots;$$

dunque, per passare dalla potenza alla radice, bisognerà:

1.° *Estrarre la radice proposta dal primo termine della potenza;* questo primo termine è a^m; ora la radice m^{esima} di a^m è $a^{\frac{m}{m}}=a$ (n.° 64).

2.° *Dividere il secondo termine della potenza pel primo termine della radice, innalzato ad una potenza minore d'un grado della radice proposta, e moltiplicato per l'esponente stesso della radice;* perchè il secondo termine della potenza è $ma^{m-1}b$; ora è chiaro che questo termine diviso per ma^{m-1}, dà per quoziente b, secondo termine della radice, ecc.

Questa regola è generale, e non soffre eccezione; ed è facile vedere che le regole prescritte per l'estrazione della radice quadrata, non sono che casi particolari.

92. Applichiamo la regola esposta all'estrazione della radice cubica del polinomio

$$27a^3-54a^2c^2+36ac^4-8c^6.$$

Operazione.

	$27a^3-54a^2c^2+36ac^4-8c^6$	$3a-2c^2$
	$-27a^3$	Divisore
1.° resto.....	$-54a^2c^2+36ac^4-8c^6$	$27a^2$
	$+54a^2c^2-36ac^4+8c^6$	
2.° resto.....	$0 \quad 0 \quad 0$	

Spiegazione.

Ordinato il polinomio, si estrae la radice cubica dal primo termine $27a^3$, che è $3a$; si forma il cubo di questo primo termine della radice, e si sottrae dal polinomio proposto; indi riflettendo che nel primo termine del resto ottenuto deve contenersi *il triplo del quadrato del primo termine moltiplicato pel secondo*, onde ottenere il secondo termine della radice, si divide il primo termine del resto, cioè $-54a^2c^2$, pel triplo del quadrato del primo termine della radice, cioè per $27a^2$, e il quoziente $-2c^2$ è il secondo termine della radice. Dal primo resto si sottrae il triplo del prodotto del quadrato del primo termine della radice, pel secondo, cioè $54a^2c^2$, più il triplo del prodotto del primo pel quadrato del secondo, che è $36ac^4$, più il cubo del secondo termine, che è $-8c^6$; e poichè si ha *zero* per resto, si conchiude che la radice cubica del polinomio proposto è $3a-2c^2$.

Esempio 2.° — Debbasi estrarre la radice cubica dal polinomio

$$a^3x^6-3a^2bx^4y^2+3ab^2x^2y^4-b^3y^6.$$

Operazione.

	$a^3x^6-3a^2bx^4y^2+3ab^2x^2y^4-b^3y^6$	ax^2-by^2.
	$-a^3x^6$	Divisore
1.º resto . . .	$-3a^2bx^4y^2+3ab^2x^2y^4-b^3y^6$	$3a^2x^4$
	$+3a^2bx^4y^2-3ab^2x^2y^4+b^3y^6$	
2.º resto . . .	$0 \quad\quad 0 \quad\quad 0$	

Esempio 3.º — Estrarre la radice cubica dal polinomio

$$27a^3-54a^2c^2+36ac^4-8c^6+27a^2m-36ac^2m$$
$$+12c^4m+9am^2-6c^2m^2+m^3.$$

Spiegazione.

Trovati, come nel primo esempio (n.º 91) i primi due termini della radice, cioè $3a-2c^2$, abbiamo per secondo resto

$$27a^2m-36ac^2m+12c^4m+9am^2-6c^2m^2+m^3;$$

il che mostra che la radice ha più di due termini. In questo caso si forma il cubo dei due termini già trovati, e lo si sottrae dal polinomio proposto. Poi si divide il resto pel triplo del quadrato dei primi due termini della radice, e si ha $+m$ pel terzo termine. Conviene poi sottrarre dal secondo resto il triplo del prodotto del quadrato dei primi due termini pel terzo più il cubo del terzo; e poichè, ciò fatto, rimane *zero*, l'operazione è compiuta; e $3a-2c^2+m$ è la radice cubica richiesta.

93. Noi termineremo qui ciò che riguarda l'estrazione delle radici, perchè primieramente nei quesiti elementari non fa bisogno dell'estrazione della radice cubica o d'un grado superiore; in secondo luogo perchè, quando si dovesse estrarre una radice di grado qua-

dunque, è meglio ricorrere ai logaritmi, come si è veduto in Aritmetica.

ESERCIZI.

LXIV. Verificare le seguenti uguaglianze:

$$\sqrt[3]{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}=a+b.$$

$$\sqrt[3]{x^3+6x^2+12x+8}=x+2.$$

$$\sqrt[3]{27-27x+90x^2-55x^3+90x^4-27x^5+27x^6}$$
$$=3-x+3x^2.$$

$$\sqrt[3]{(125-225a^2+285a^2-507a^3+474a^4-384a^5}$$
$$+392a^6-192a^7+96a^8-64a^9)=5-3a+2a^2-4a^3.$$

Calcolo dei radicali e degli esponenti negativi e frazionarî.

Identità dei radicali e degli esponenti frazionarî.

91. *I radicali e gli esponenti frazionarî sono due notazioni differenti che servono ad indicare la stessa operazione.*

Infatti, in virtù della regola del n.° 64, si ha:

$$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}};\qquad \sqrt[3]{a-b}=(a-b)^{\frac{1}{3}};\qquad \sqrt[m]{a^r b^s}=a^{\frac{r}{m}}b^{\frac{s}{m}}.$$

Reciprocamente:

$$a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}; \qquad (a-b)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a-b}; \qquad a^{\frac{r}{m}}b^{\frac{s}{m}}=\sqrt[m]{a^r b^s}.$$

95. Problema. — *Valutare un monomio i cui esponenti sono frazionari.*

Abbiasi primieramente il monomio $a^{\frac{m}{n}}$, il cui esponente è *frazionario* e *positivo;* avremo $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Per valutare dunque un monomio della forma $a^{\frac{m}{n}}$ bisogna innalzare a alla potenza m ed estrarre la radice di grado n dal resultato.

Esempio:

$$8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{64}=4.$$

Si abbia in secondo luogo l'espressione $a^{-\frac{m}{n}}$, nella quale l'esponente $-\frac{m}{n}$ è contemporaneamente *frazionario* e *negativo;* avremo:

$$a^{-\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^{-m}};$$

ma (n. 53) $a^{-m}=\frac{1}{a^m}$; dunque $a^{-\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}$, ovvero

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}.$$

Per valutare un monomio della forma $a^{-\frac{m}{n}}$ bisogna dunque dividere l'unità per la quantità $\sqrt[n]{a^m}$.

Esempio:

$$25^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{25^3}}=\frac{1}{125}.$$

Abbiasi ancora l'espressione $a^{\frac{p}{q}} b^{-\frac{m}{n}}$; riducendo gli esponenti allo stesso denominatore, si ha

$$a^{\frac{p}{q}} b^{-\frac{m}{n}} = a^{\frac{np}{qn}} b^{-\frac{mq}{qn}};$$

dunque
$$a^{\frac{p}{q}} b^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[nq]{a^{pn}\, b^{-mq}},$$

ovvero
$$a^{\frac{p}{q}} b^{-\frac{m}{n}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{pn}}{b^{mq}}},$$

e ciò perchè (n.° 34)

$$a^{pn} b^{-mq} = \frac{a^{pn}}{b^{mq}}.$$

Esempio:

$$a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{3}{6}} b^{-\frac{4}{6}} = \sqrt[6]{a^3 b^{-4}} = \sqrt[6]{\frac{a^3}{a^4}}.$$

Proprietà dei radicali.

96. *Si può far passare sotto ad un radicale di grado* m *un fattore posto fuori del segno, purchè s' innalzi questo fattore alla potenza* m.

Così:

$$a^p \sqrt[m]{b^q} = \sqrt[m]{a^{pm} b^q}.$$

Infatti,

$$a^p \sqrt[m]{b^q} = a^p\, b^{\frac{q}{m}} = a^{\frac{pm}{m}}\, b^{\frac{q}{m}} = \sqrt[m]{a^{pm} b^q}.$$

Esempi:

$$3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \times 2} = \sqrt{18}; \qquad a^2 \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^6 b};$$

$$(a+b)\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\frac{(a-b)(a+b)^2}{a+b}} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

97. *Per fare uscire un fattore di sotto ad un radicale di grado* m, *bisogna estrarne la radice* m^{esima}.

Così:

$$\sqrt[m]{a^{pm}b^q} = a^p\sqrt[m]{b^q}.$$

Infatti,

$$\sqrt[m]{a^{pm}b^q} = a^{\frac{pm}{m}}\, b^{\frac{q}{m}} = a^p\, b^{\frac{q}{m}} = a^p\sqrt[m]{b^q}.$$

Esempi:

$$\sqrt{4a} = 2\sqrt{a}; \qquad \sqrt[3]{a^6b^2} = a^2\sqrt[3]{b^2};$$

$$\sqrt{a^4-a^3} = \sqrt{a^4\left(1-\frac{1}{a}\right)} = a^2\sqrt{1-\frac{1}{a}}.$$

98. *Non si altera il valore d'un radicale moltiplicando o dividendo per uno stesso numero il suo indice e gli esponenti dei fattori, che sono sotto al radicale.*

Così: 1.°

$$\sqrt[m]{a^pb^q} = \sqrt[mn]{a^{pn}b^{qn}}.$$

Infatti,

$$\sqrt[m]{a^pb^q} = a^{\frac{p}{m}}\, b^{\frac{q}{m}} = a^{\frac{pn}{mn}}\, b^{\frac{qn}{mn}} = \sqrt[mn]{a^{pn}b^{qn}}.$$

Esempi:

$$\sqrt[3]{ab^2} = \sqrt[15]{a^5b^{10}}; \qquad \sqrt{a-b} = \sqrt[6]{(a-b)^3}.$$

2.°

$$\sqrt[mn]{a^{pn}b^{qn}} = \sqrt[m]{a^pb^q}.$$

Infatti,

$$\sqrt[mn]{a^{pn}b^{qn}} = a^{\frac{pn}{mn}}\, b^{\frac{qn}{mn}} = a^{\frac{p}{m}}\, b^{\frac{q}{m}} = \sqrt[m]{a^pb^q}.$$

Esempi:

$$\sqrt[12]{a^6b^{18}} = \sqrt{ab^3}; \quad \sqrt[4]{a^2-2ab+b^2} = \sqrt[4]{(a-b)^2} = \sqrt{a-b}.$$

Semplicizzazione dei radicali.

99. *Ridurre un radicale alla sua più semplice espressione, significa trovare un radicale equivalente, del quale l'indice e gli esponenti dei fattori sieno primi fra loro.*

100. *Per ridurre un radicale alla sua più semplice espressione bisogna dividere il suo indice e gli esponenti dei fattori pel loro massimo comun divisore.*

Questa regola resulta evidentemente dall'aver provato che non si altera il valore d'un radicale dividendo il suo indice e gli esponenti dei fattori, che sono sotto ad esso, per lo stesso numero (n.° 98), e che i quozienti ottenuti dividendo più numeri pel loro massimo comun divisore sono primi fra loro.

Debbasi eseguire questa riduzione sul radicale

$$\sqrt[12]{a^9b^6c^{21}}.$$

Il massimo comun divisore fra 12, 9, 6 e 21 è 3, e per conseguenza

$$\sqrt[12]{a^9b^6c^{21}}=\sqrt[4]{a^3b^2c^7}.$$

Si troverebbe ugualmente che

$$\sqrt[15]{a^{10}b^5}=\sqrt[3]{a^2b}.$$

Riduzione dei radicali allo stesso indice.

101. L'oggetto di questa operazione è di *trovare radicali di uguale indice, equivalenti a radicali dati.*

102. *Per ridurre più radicali allo stesso indice si moltiplicano l'indice di ciascun radicale e gli esponenti dei fattori posti sotto ad essi pel prodotto degl'indici di tutti gli altri radicali.*

È evidente, infatti, che così operando ciascun radicale non subisce nessun' alterazione (n.° 98), e che i nuovi indici sono uguali: perchè ciascun di essi è il prodotto di tutti gl'indici primitivi, e perchè più numeri astratti dànno lo stesso prodotto, qualunque sia l'ordine con cui vengono moltiplicati.

Debbansi, per esempio, ridurre allo stesso indice i radicali

$$\sqrt{a},\qquad \sqrt[3]{a^2b},\qquad \sqrt[5]{2a^2b^3}.$$

Per la regola esposta, avremo:

$$\sqrt[2.3.5]{a^{3.5}},\qquad \sqrt[3.2.5]{a^{2.2.5}b^{2.5}},\qquad \sqrt[5.2.3]{2^{2.3}a^{2.2.3}b^{3.2.3}},$$

cioè

$$\sqrt[30]{a^{15}},\qquad \sqrt[30]{a^{20}b^{10}},\qquad \sqrt[30]{64a^{12}b^{18}}.$$

103. Quando gl' indici dei radicali dati non sono primi fra loro, si può modificare la regola precedente come segue: *si cerca il minimo multiplo comune degl' indici, poi si moltiplicano l' indice e gli esponenti di ciascun radicale pel quoziente che si ottiene dividendo per questo indice il minimo multiplo trovato.*

Sieno, per esempio, i radicali

$$\sqrt{2a},\qquad \sqrt[4]{a^3b^2},\qquad \sqrt[6]{3a^2b}.$$

Il minimo multiplo comune degl'indici 2, 4, 6 è 12, ed i quozienti di 12 per 2, 4, 6 sono 6, 3, 2; secondo la regola avremo dunque:

$$\sqrt[2\cdot6]{2^6a^6},\qquad \sqrt[4\cdot3]{a^{3\cdot3}b^{2\cdot3}},\qquad \sqrt[6\cdot2]{3^2a^{2\cdot2}b^2};$$

ovvero

$$\sqrt[12]{64a^6},\qquad \sqrt[12]{a^9b^6},\qquad \sqrt[12]{9a^4b^2}.$$

Per la regola generale l'indice comune sarebbe stato

$$2\times4\times6=48.$$

Radicali simili.

104. Si dicono *radicali simili* quelli che hanno lo stesso indice e la stessa quantità sotto al radicale, qualunque sieno d'altronde i loro coefficienti; tali sono

$$3a\sqrt[3]{5ab^2},\qquad -\frac{2}{5}b^2c\sqrt[3]{5ab^2}.$$

105. Per conoscere se due radicali sono simili bisogna ridurli alla più semplice espressione secondo la regola data (n.° 100); si troverà così che i radicali

$$\sqrt[4]{324b^2}\quad \text{e}\quad \sqrt[6]{8a^6b^3}$$

che sembrano dissimili, si riducono a

$$3\sqrt{2b}\quad \text{e}\quad a\sqrt{2b},$$

e per conseguenza sono simili.

106. *Per fare la riduzione dei radicali simili si pongono in una stessa parentesi tutti i coefficienti dei radicali simili, e la si affètta del radicale comune.*

Così il polinomio irrazionale

$$3a^2\sqrt[3]{2a^2b}-2ab\sqrt[3]{2a^2b}-5\sqrt[3]{2a^2b}-2a^2\sqrt[3]{2a^2b}+3\sqrt[3]{2a^2b}$$

si riduce a

$$(3a^2-2ab-5-2a^2+3)\sqrt[3]{2a^2b},$$

ovvero

$$(a^2-2ab-2)\sqrt[3]{2a^2b}.$$

Addizione e sottrazione dei radicali.

107. Regola. — *Per fare l'addizione e la sottrazione dei radicali si scrivono uno di seguito all'altro coi loro segni rispettivi o con segni contrari, secondochè si vogliono sommare o sottrarre; poi si fa la riduzione dei radicali simili.*

Esempio di addizione.

$$(3a\sqrt{2b}-4a^2b\sqrt[3]{2b^2})+(-2b\sqrt{2b}+2abc\sqrt[3]{2b^2})$$

$$+(\sqrt{2b}-6\sqrt[3]{2b^2}-\sqrt[5]{c})=3a\sqrt{2b}-4a^2b\sqrt[3]{2b^2}-2b\sqrt{2b}$$

$$+2abc\sqrt[3]{2b^2}+\sqrt{2b}-6\sqrt[3]{2b^2}-\sqrt[5]{c}=(3a-2b+1)\sqrt{2b}$$

$$+(-4a^2b+2abc-6)\sqrt[3]{2b^2}-\sqrt[5]{c}=(3a-2b+1)\sqrt{2b}$$

$$-2(2a^2b-abc+3)\sqrt[3]{2b^2}-\sqrt[5]{c}.$$

Esempio di sottrazione.

$$(3a\sqrt[3]{ab^2}-2a^2b\sqrt{b})-(2c\sqrt[3]{ab^2}-5a^2b\sqrt{b})$$

$$=3a\sqrt[3]{ab^2}-2a^2b\sqrt{b}-2c\sqrt[3]{ab^2}+5a^2b\sqrt{b}$$

$$=(3a-2c)\sqrt[3]{ab^2}+3a^2b\sqrt{b}.$$

Moltiplicazione dei radicali.

108. Regola. — *Per fare il prodotto di più radicali aventi lo stesso indice, si moltiplicano fra loro tutte le quantità poste sotto ai radicali, e si affètta il prodotto del radicale comune. Se vi sono coefficienti se ne fa il prodotto.*

Così, qualunque sieno le quantità A, B, C, D, ecc., si ha:

$$\sqrt[m]{A}\times\sqrt[m]{B}\times\sqrt[m]{C}\times\sqrt[m]{D}\ldots \text{ ecc.} = \sqrt[m]{A\times B\times C\times D\ldots}$$

Questa regola resulta dal teorema che *la radice* m^esima^ *d'un prodotto è uguale al prodotto delle radici* m^esime^ *dei fattori.*

Esempi:

$$\sqrt[3]{3a^2b}\times\sqrt[3]{7a^2bc^2}=\sqrt[3]{21a^4b^2c^2}=a\sqrt[3]{21ab^2c^2}.$$

$$\sqrt{a+b}\times\sqrt{a-b}\times\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)}$$

$$=\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}=\sqrt{a^4-b^4}.$$

$$3\sqrt{a}\times 2\sqrt{b}\times 5\sqrt{c}=30\sqrt{abc}.$$

Se i radicali da moltiplicarsi hanno indice differente, si riducono allo stesso indice e si opera come sopra.

Esempi:

$$\sqrt{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[6]{a^3}\times\sqrt[6]{b^2}=\sqrt[6]{a^3b^2}.$$

$$\sqrt[5]{2a^3b^2}\times\sqrt{3ab}=\sqrt[10]{4a^6b^4}\times\sqrt[10]{243a^5b^5}$$

$$=\sqrt[10]{972a^{11}b^9}=a\sqrt[10]{972ab^9}.$$

Divisione dei radicali.

109. Regola. — *Per dividere uno per l'altro due radicali aventi lo stesso indice, si dividono fra loro le quantità poste sotto ai radicali, e si affètta il quoziente del radicale comune. Se vi sono coefficienti si dividono fra loro.*

Così, qualunque sieno le quantità A e B, si ha:

$$\sqrt[m]{A}:\sqrt[m]{B}=\sqrt[m]{\frac{A}{B}}.$$

Ciò perchè la radice m^{esima} d'una frazione è uguale alla radice m^{esima} del numeratore divisa per la radice m^{esima} del denominatore.

Esempi:

$$\sqrt{12}:\sqrt{3}=\sqrt{\frac{12}{3}}=\sqrt{4}=2.$$

$$\sqrt[3]{6ab^2}:\sqrt[3]{2a^2b}=\sqrt[3]{\frac{6ab^2}{2a^2b}}=\sqrt[3]{\frac{3b}{a}}.$$

$$\sqrt[5]{a^2-b^2}:\sqrt[5]{a+b}=\sqrt[5]{\frac{a^2-b^2}{a+b}}=\sqrt[5]{a-b}.$$

$$8\sqrt{a}:2\sqrt{b}=\frac{8}{2}\sqrt{\frac{a}{b}}=4\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Se i radicali da dividersi hanno indice differente, si riducono allo stesso indice, e poi si opera come sopra.

Esempi:

$$\sqrt{a}:\sqrt[3]{b^2}=\sqrt[6]{a^3}:\sqrt[6]{b^4}=\sqrt[6]{\frac{a^3}{b^4}}.$$

$$\sqrt[5]{2ab^3}:\sqrt{ab}=\sqrt[10]{4a^2b^6}:\sqrt[10]{a^5b^5}=\sqrt[10]{\frac{4a^2b^6}{a^5b^5}}=\sqrt[10]{\frac{4b}{a^3}}.$$

Formazione delle potenze dei radicali

110. Regola. — *Per innalzare un radicale alla potenza* m, *si può:*

1.° *innalzare la quantità sotto al radicale alla potenza* m, *lasciando l'indice qual è;*

2.° *dividere, quand'è possibile, l'indice per* m, *lasciando qual'è la quantità sotto al radicale.*

Così: 1.°

$$\left(\sqrt[m]{A}\right)^n = \sqrt[m]{A^n}, \text{ qualunque sia } A.$$

Infatti,

$$\left(\sqrt[m]{A}\right)^n = \sqrt[m]{A} \times \sqrt[m]{A} \times \sqrt[m]{A} \ldots\ldots;$$

oppure (n.° 108):

$$\left(\sqrt[m]{A}\right)^n = \sqrt[m]{A \times A \times A \times A \ldots\ldots};$$

ovvero

$$\left(\sqrt[m]{A}\right)^n = \sqrt[m]{A^n}.$$

Esempi:

$$\left(\sqrt{a}\right)^3 = \sqrt{a^3} = a\sqrt{a}.$$

$$\left(2a\sqrt[3]{2ab^2}\right)^4 = 16a^4\sqrt[3]{16a^4b^8} = 16a^4 \times 2ab^2\sqrt[3]{2ab^2}$$

$$= 32a^5b^2\sqrt[3]{2ab^2}.$$

2.°

$$\left(\sqrt[mn]{A}\right)^n = \sqrt[m]{A}.$$

Infatti,

$$\left(\sqrt[mn]{A}\right)^n = \sqrt[mn]{A^n};$$

oppure (n.° 98)

$$\left(\sqrt[mn]{A}\right)^n = \sqrt[m]{A}.$$

Esempi:

$$\left(\sqrt[4]{a^2+b^2}\right)^2 = \sqrt{a^2+b^2}; \quad \left(5a\sqrt[6]{3ab}\right)^3 = 125a^3\sqrt{3ab}.$$

Estrazione delle radici dai radicali.

111. Regola. — *Per estrarre la radice* n^esima^ *da un radicale, si può:*

1.° *moltiplicare l'indice del radicale per* n, *lasciando qual' è la quantità posta sotto al radicale;*

2.° *estrarre la radice* n^esima^ *dalla quantità sotto al radicale, quand' è possibile, lasciando l' indice qual è.*

Questa regola è vera per ciò solo che è contraria alla precedente.

Esempi del 1.° metodo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5ab}} = \sqrt[6]{5ab}. \quad \sqrt[5]{\sqrt[3]{3a^2b}} = \sqrt[15]{3a^2b}.$$

Esempi del 2.° metodo:

$$\sqrt{\sqrt[3]{4a^2b^2}} = \sqrt[3]{2ab}. \quad \sqrt[3]{\sqrt[5]{-8a^3b^9}} = \sqrt[5]{-2ab^3}.$$

112. Resulta dal 1.° metodo che:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[mn]{A}; \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[r]{A}}} = \sqrt[m]{\sqrt[nr]{A}} = \sqrt[mnr]{A}, \text{ ecc.};$$

dal che si deduce, invertendo i membri:

$$\sqrt[4]{A} = \sqrt{\sqrt{A}}; \quad \sqrt[6]{A} = \sqrt[3]{\sqrt{A}};$$

$$\sqrt[8]{A}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{A}}},\quad \text{ecc.}$$

Così, *si può estrarre la radice* quarta *da un numero con due estrazioni successive di radice quadrata: la radice* sesta *con un'estrazione di radice quadrata ed una di radice cubica; la radice* ottava *con tre estrazioni di radice quadrata; e, in generale, si potrà per mezzo di estrazioni combinate di radici quadrate e cubiche ottenere tutte le radici, i cui gradi essendo composti dei soli fattori 2 e 3, sono della forma* $2^s \cdot 3^t$, *essendo* s *e* t *numeri interi.*

Calcolo degli esponenti negativi e frazionari.

113. La regola della Moltiplicazione relativa agli esponenti, già dimostrata (n.° 22 — IV) nel caso in cui essi sono positivi, si applica ugualmente agli esponenti negativi.

Così:

I. $a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$;

II. $a^{-m} \times a^n = a^{-m+n}$;

III. $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n}$.

Infatti (n.° 33),

I. $a^m \times a^{-n} = a^m \times \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

II. $a^{-m} \times a^n = \dfrac{1}{a^m} \times a^n = \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}$;

III. $a^{-m} \times a^{-n} = \dfrac{1}{a^m} \times \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$.

114. La regola degli esponenti positivi nella Divisione (n.° 30 — IV) si applica ugualmente agli esponenti negativi.

Così:

I. $a^m : a^{-n} = a^{m+n}$;

II. $a^{-m} : a^n = a^{-m-n}$;

III. $a^{-m} : a^{-n} = a^{-m+n}$.

Infatti (n.° 55),

I. $a^m : a^{-n} = a^m : \frac{1}{a^n} = a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

II. $a^{-m} : a^n = \frac{1}{a^m} : a^n = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-m-n}$;

III. $a^{-m} : a^{-n} = \frac{1}{a^m} : \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} = a^{-m+n}$.

115. L'uso degli esponenti negativi offre il mezzo di porre sotto forma intera il quoziente di un polinomio per un monomio.

Esempio:

$$\frac{5x^3+(a-1)x^2-7a^2x+15a^3}{5x}$$

$$=x^2+\frac{1}{5}(a-1)x-\frac{7}{5}a^2+5a^3x^{-1}.$$

116. Le regole relative agli esponenti interi positivi o negativi si applicano ugualmente agli esponenti frazionarî.

Così:

1.° $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$; 2.° $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$;

3.° $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^s = a^{\frac{ms}{n}}$; 4.° $\sqrt[s]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{ns}}$,

essendo n e q numeri positivi, m e p numeri negativi o positivi, in guisa che $\frac{m}{n}$, $\frac{p}{q}$ hanno segno qualunque.

Infatti,

1.° $a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}\times\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{a^{mq}}\times\sqrt[nq]{a^{pn}}=\sqrt[nq]{a^{mq+pn}}$

$$=a^{\frac{mq}{nq}+\frac{pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{n}}.$$

2.° $a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=\sqrt[n]{a^m}:\sqrt[q]{a^p}=\sqrt[nq]{^{mq}}:\sqrt[nq]{a^{pn}}=\sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{pn}}}$

$$=\sqrt[nq]{a^{mq-np}}=a^{\frac{mq}{nq}-\frac{pn}{nq}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}.$$

3.° $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^s=\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^s=\sqrt[n]{a^{ms}}=a^{\frac{ms}{n}}.$

4.° $\sqrt[s]{a^{\frac{m}{n}}}=\sqrt[s]{\sqrt[n]{a^m}}=\sqrt[ns]{a^{ms}}=a^{\frac{m}{ns}}.$

117. Le stesse regole si applicano ancora agli esponenti *incommensurabili*, perchè si possono ad essi sostituire esponenti commensurabili che ne differiscano di una quantità minore di qualunque quantità data; lo spirito d'analogia ed il bisogno di generalizzare le teorie conduce anche ad ammettere queste regole nel caso in cui gli esponenti fossero *immaginari*.

ESERCIZI.

LXV. Verificare e dimostrare le seguenti uguaglianze:

$$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}. \qquad a^{-\frac{n}{m}}=\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}.$$

$$\sqrt[m]{a^nb^pc^q}=a^{\frac{n}{m}}b^{\frac{p}{m}}c^{\frac{q}{m}}=\left(a^nb^pc^q\right)^{\frac{1}{m}}.$$

$$\sqrt[5]{a^2bc}=a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{1}{5}}c^{\frac{1}{5}}=\left(a^2bc\right)^{\frac{1}{5}}.$$

$$\sqrt[m]{\frac{a^n b^p}{c^r d^s e^t}} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} c^{-\frac{r}{m}} d^{-\frac{s}{m}} e^{-\frac{t}{m}}.$$

$$a^r \sqrt[n]{b^s} = \sqrt[n]{a^{rn} b^s}. \qquad 5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \times 3} = \sqrt{75}.$$

$$(m+n)\sqrt{\frac{m-n}{m+n}} = \sqrt{m^2-n^2}. \qquad \sqrt{9ab} = 3\sqrt{ab}.$$

$$\sqrt{m^4-m^3} = m^2\sqrt{1-\frac{1}{m}}. \qquad \sqrt[3]{mn^2} = \sqrt[6]{m^2n^4}.$$

$$\sqrt[m]{a^n b^r} = \sqrt[m:s]{a^{n:s} b^{r:s}}. \qquad \sqrt[4]{m^2-2mn+n^2} = \sqrt{m-n}.$$

$$\sqrt[20]{a^6 b^2 c^4 d^{10}} = \sqrt[10]{a^3 b c^2 d^5}. \qquad \sqrt[12]{a^3 b^9} = \sqrt[4]{ab^3}.$$

$$\sqrt{ab},\ \sqrt[5]{2a^3},\ \sqrt[3]{a^2b^5} = \sqrt[30]{a^{15}b^{15}},\ \sqrt[30]{2^6a^{18}},\ \sqrt[30]{a^{20}b^{50}}.$$

$$\sqrt{3a},\ \sqrt[8]{3a^2b},\ \sqrt[4]{a^3b^2} = \sqrt[8]{3^4a^4},\ \sqrt[8]{3a^2b},\ \sqrt[8]{a^6b^4}.$$

$$2a^2\sqrt{m} - 3a\sqrt{m} + 7\sqrt{m} = (2a^2-3a+7)\sqrt{m}.$$

$$m\sqrt{ab} + n\sqrt{ab} - 2m\sqrt{ab} + 3n\sqrt{ab} = (-m+4n)\sqrt{ab}.$$

$$6\sqrt[4]{\frac{3}{2}} - 2\sqrt[4]{\frac{3}{2}} + a\sqrt[4]{\frac{3}{2}} - \frac{2b}{c}\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$$

$$= \left(4+a-\frac{2b}{c}\right)\sqrt[4]{\frac{3}{2}}.$$

$$5\sqrt[7]{9} - 2\sqrt[5]{14} + \sqrt[3]{2} - 5\sqrt[5]{14} - 2\sqrt[7]{9}$$

$$= 3\sqrt[7]{9} - 7\sqrt[5]{14} + \sqrt[3]{2}.$$

$$(10\sqrt{2} + 5\sqrt[7]{8} - 7\sqrt[m]{5} + 2\sqrt[3]{a})$$

$$+(5\sqrt{2}+\sqrt[7]{8}+4\sqrt[m]{5}-5\sqrt[3]{a})$$

$$-(-3\sqrt{2}-9\sqrt[7]{8}-3\sqrt[m]{5}+\sqrt[3]{a}+\sqrt{ab})$$

$$=12\sqrt{2}-5\sqrt[7]{8}-6\sqrt[m]{5}+\sqrt{ab}.$$

$$(18\sqrt{7}-5\sqrt{6}+10\sqrt[4]{11}-5\sqrt[3]{13})$$

$$-(6\sqrt{7}-2\sqrt{6}+\frac{17}{2}\sqrt[4]{11}+2\sqrt[3]{13})$$

$$=12\sqrt{7}-3\sqrt{6}+\frac{3}{2}\sqrt[4]{11}-5\sqrt[3]{13}.$$

$$a\sqrt[n]{x}\times b\sqrt[n]{y}\times c\sqrt[n]{z}=abc\sqrt[n]{xyz}.$$

$$\sqrt[3]{4}\times 7\sqrt[3]{6}\times\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}=\frac{7}{2}\sqrt[3]{120}=7\sqrt[3]{15}.$$

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[mn]{a^n}\times\sqrt[mn]{b^m}=\sqrt[mn]{a^n b^m}.$$

$$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{648000}.$$

$$\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{\frac{1}{3}}\times\sqrt[8]{3}=\sqrt[24]{\frac{256}{3^3}}.\qquad a\sqrt[m]{x}\times b\sqrt[n]{y}\times c\sqrt[p]{z}$$

$$=abc\sqrt[mnp]{x^{np}y^{mp}z^{mn}}.$$

$$(\sqrt{6}+\sqrt[3]{2}-2\sqrt[4]{5})\times\sqrt{3}=\sqrt{18}+\sqrt[6]{108}-2\sqrt[4]{45}.$$

$$(3+\sqrt{5})\times(2-\sqrt{5})=1-\sqrt{5}.$$

$$(7+2\sqrt{6})\times(9-5\sqrt{6})=3-17\sqrt{6}.$$

$$(\sqrt{a}+c\sqrt[3]{b})\times(\sqrt{a}-c\sqrt[3]{b})=a-c^2\sqrt[3]{b^2}.$$

$$\sqrt[n]{a+\sqrt{b}}\times\sqrt[n]{a-\sqrt{b}}=\sqrt[n]{a^2-b}.$$

$$c\sqrt[m]{a}:d\sqrt[m]{b}=\frac{c}{d}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}.\quad 4\sqrt[3]{12}:2\sqrt{3}=2\sqrt[6]{\frac{16}{3}}.$$

$$c\sqrt{a^2-x^2}:\sqrt{a+x}=c\sqrt{a-x}.$$

$$\sqrt{ab^2-b^2c}:\sqrt{a-c}=b.$$

$$(\sqrt{72}+\sqrt{32}-4):\sqrt{8}=5-\sqrt{2}.$$

$$\sqrt[4]{\frac{a}{b}}:\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt[4]{\frac{b}{a}}.$$

$$\left(\sqrt{b}\right)^5=\sqrt{b^5}.\qquad\left(\sqrt[m]{x}\right)^n=\sqrt[m]{x^n}.$$

$$\left(\sqrt[8]{a^2+b^2}\right)^2=\sqrt[4]{a^2+b^2}.$$

$$\left(3a\sqrt[4]{5ab}\right)^3=27a^3\sqrt[4]{125a^3b^3}.$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{3x}}=\sqrt[6]{3x}.\qquad\sqrt[5]{\sqrt{a^2b^3}}=\sqrt[10]{a^2b^3}.$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{9a^2b^4}}=\sqrt[3]{3ab^2}.\qquad\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[r]{ab}}}=\sqrt[mnr]{ab}.$$

$$\sqrt[8]{abc}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{abc}}}.$$

$$11a^{-2}\times2a^{-5}\times4a^6\times9a^7=792a^6.$$

$$2a^{-3} \times 7a^{-9} \times -3a^6 = -42a^{-6} = \frac{-42}{a^6}.$$

$$a^{-5}b \times a^{-7}d \times 10a = 10a^{-11}bd = \frac{10bd}{a^{11}}.$$

$$5a^3b^{-4} \times a^2b^5c \times -3a^7 = -15a^{12}bc.$$

$$ca^9 : da^{-6} = \frac{ca^{15}}{d}. \qquad a^{-5} : a^3 = a^{-8}.$$

$$a^4 : a^{-2} = a^6. \qquad a^{-6} : a^{-2} = a^{-4}.$$

$$a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms+rn}{ns}}. \qquad a^{\frac{m}{n}} \times a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}.$$

$$a^{-\frac{1}{2}} \times a^{\frac{7}{4}} \times a^{-\frac{1}{5}} = a^{\frac{21}{20}} = a\sqrt[20]{a}.$$

$$a^{-\frac{3}{4}} \times a^{-\frac{7}{8}} = a^{-\frac{13}{8}} = \frac{1}{a\sqrt[8]{a^5}}.$$

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = a^{\frac{mq}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}.$$

Delle equazioni

Equazioni di primo grado ad una incognita.

118. *Identità* è un' eguaglianza evidente di per sè stessa, come

$$a=a, \quad 8=8.$$

119. *Equazione* è una uguaglianza che si verifica per valori particolari di una o più lettere che essa contiene e che rappresentano quantità incognite, come

$$8x+14=42-6x,$$

la quale è vera pel solo valore d'$x=2$.

Le due quantità separate dal segno (=) si chiamano *membri* dell' equazione: le diverse parti separate le une dalle altre dai segni (+) o (—) si dicono *termini* dell' equazione. — Così nell' esempio addotto, $8x+14$ è il primo membro, e $42-6x$ il secondo; le parti $8x$, 14, 42, $-6x$ sono i termini dell' equazione.

120. *Risolvere un'equazione* significa trovare i valori delle incognite che *sodisfano* all'equazione proposta; vale a dire, che rendono uguali i due membri di cui essa si compone. — Tali valori son detti *la soluzione* o *le radici* dell' equazione medesima.

Sostituendo all' incognita il suo valore, l' equazione si trasforma in un' identità.

121. Chiamasi *grado d' un' equazione* la maggior somma degli esponenti di tutte le incognite in uno stesso termine.

Così le equazioni

$$5x-7=24+2x,$$
$$7x+6y=40,$$

sono *di primo grado.*

Le equazioni

$$4x^2-7y=15,$$
$$5x-3y=2xy-3,$$

sono *di secondo grado.* — In quest'ultima il termine $2xy$ è di secondo grado rispetto alle due incognite x e y.

122. Le equazioni diconsi ancora *ad una, due, tre.... incognite*, secondo il numero delle incognite stesse. Oltre a ciò le equazioni son dette *numeriche* o *letterali* secondochè le quantità note sono rappresentate da numeri o da lettere.

E quelle equazioni si dicono essere *equivalenti* che rimangono soddisfatte dai medesimi val ri delle incognite.

123. La risoluzione di un'equazione di primo grado ad una incognita si appoggia sopra i seguenti principii o assiomi:

1.° *Se a quantità uguali si aggiungono o se da esse si tolgono quantità uguali, i resultati sono sempre uguali.*

2.° *Se quantità uguali si moltiplicano o si dividono per quantità uguali, i resultati sono sempre uguali.*

3.° *Se quantità uguali s'innalzano ad una medesima potenza, o se da esse si estrae una radice d'un medesimo grado, i resultati sono sempre uguali.*

124. L'incognita in un'equazione di primo grado può essere legata colle quantità cognite in quattro modi: *per addizione, per sottrazione, per moltiplicazione e per divisione.*

Abbiasi l'equazione $x+3=12$, nella quale l'incognita x è legata col numero 3 *per addizione.*

Togliamo 3 dai due membri, il che può sempre farsi (n.° 123 — 1.°); avremo $x+3-3=12-3$, ovvero $x=9$.

Dunque, *quando l'incognita è legata per addizione* si isola, cioè si scioglie *per sottrazione.*

Se invece si avesse l'equazione $x-3=12$, nella quale l'incognita è legata col numero 3 *per sottrazione*, aggiungendo 3 ai due membri, si avrebbe

$$x-3+3=12+3, \quad \text{o} \quad x=15.$$

Dunque, *se l'incognita è legata per sottrazione* s'isola *per addizione.*

Sia l'equazione $3x=12$, nella quale l'incognita x è legata col numero 3 *per moltiplicazione.* — Dividiamo i due membri per 3 (n.° 123 — 2.°), avremo

$$\frac{3x}{3}=\frac{12}{3}, \quad \text{ovvero} \quad x=4.$$

Dunque, *quando l'incognita è legata per moltiplicazione,* si isola *per divisione.*

Abbiasi finalmente l'equazione $\frac{x}{3}=12$, nella quale l'incognita è legata col numero 3 *per divisione.* — Moltiplichiamo i due membri per 3, ed avremo

$$\frac{x}{3}\times3=12\times3, \quad \text{o} \quad x=36.$$

Dunque, *se l'incognita è legata per divisione,* s'isola *per moltiplicazione.*

123. Da ciò può concludersi in generale che *quando l'incognita è legata per via d'un'operazione qualunque, si isola per mezzo dell'operazione contraria.* — *E se l'incognita è legata da diverse operazioni in un tempo, s'isola successivamente per mezzo delle operazioni opposte.*

Sia, per esempio, l'equazione $4+\frac{2x}{3}-5=11$, nella quale l'incognita x è legata ai numeri 4, 5, 2, 3 per addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione; se ne deduce:

1.° togliendo 4 dai due membri, $\frac{2x}{3}-5=7$;

2.° aggiungendo 5, ... $\frac{2x}{3}=12$;

3.° dividendo per 2, ... $\frac{x}{3}=6$;

4.° moltiplicando per 3, ... $x=18$, e così è risoluta l'equazione. — Per provare che 18 è il valore d'x, o *la radice* dell'equazione proposta, basta sostituire 18 ad x nell'equazione stessa, e si avrà

$$4+\frac{2\times18}{3}-5=11, \quad \text{ovvero} \quad 11=11.$$

126. E qui è utile avvertire che *può esser cambiato il segno a tutti i termini d'un'equazione data*, e ciò in virtù del primo assioma (n.° 123).

Infatti, abbiasi l'equazione $10-3x=5x-6$.

Facendo passare nel secondo membro tutti i termini del primo, e reciprocamente, questa equazione diviene:

$$-5x+6=-10+3x;$$

e invertendo i due membri,

$$-10+3x=-5x+6.$$

127. Da quanto precede può ricavarsi la regola generale seguente:

Per risolvere un'equazione di primo grado ad un'incognita

1.° *si trasportano nel primo membro tutti i termini affètti dall'incognita, e nel secondo tutti i termini cogniti, cambiando però il segno a ciascuno di essi* (operazione che chiamasi *trasposizione*);

2.° *si fanno sparire tutti i denominatori dell'equazione, moltiplicando tutti i termini pel loro minimo multiplo comune;*

3.° *si fa la riduzione de' termini simili nei due membri; e se l'equazione è letterale, si mette l'incognita a fattor comune nel primo membro;*

4.° *finalmente s'isola l'incognita dal suo coefficiente per mezzo della divisione.*

Applichiamo questa regola ad alcuni esempi.

Esempio 1.°

Sia l'equazione

$$x-\frac{2x}{3}+1=5-\frac{x}{2}.$$

1.° Trasportando il termine cognito $+1$ nel secondo membro con segno contrario, e il termine incognito

$-\frac{x}{2}$ nel primo membro, parimente con segno contrario, l'equazione proposta si trasforma nell'altra *equivalente*

$$x-\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}=5-1.$$

Infatti, così non si fa che togliere 1 ed aggiungere $\frac{x}{2}$ ai due membri (n.° 123 — 1.°).

2.° Moltiplicando tutti i termini di questa equazione per 6 (minimo denominatore comune), essa si trasforma nell'altra equivalente

$$6x-\frac{12x}{3}+\frac{6x}{2}=30-6,$$

cioè

$$6x-4x+3x=30-6.$$

Infatti, così non si fa che moltiplicare i due membri dell'equazione per uno stesso numero (n.° 123 — 2.°).

3.° Riducendo i termini simili, questa equazione diviene

$$5x=24.$$

4.° Dividendo per 5 ambo i membri per isolare la incognita (n.° 123 — 2.°), si ha finalmente

$$x=\frac{24}{5}=4+\frac{4}{5}.$$

Dunque *la radice* dell'equazione, o il valore d'x è $4+\frac{4}{5}$. Volendo verificarlo, si sostituisca $4+\frac{4}{5}$ o $\frac{24}{5}$ ad x nell'equazione proposta, e troveremo:

$$\frac{24}{5}-\frac{2\times24}{3\times5}+1=5-\frac{24}{5\times2}.$$

ovvero

$$\frac{24}{5}-\frac{48}{15}+1=5-\frac{24}{10},$$

oppure

$$\frac{24}{5} - \frac{16}{5} + 1 = 5 - \frac{12}{5},$$

cioè

$$\frac{8}{5} + 1 = 5 - \frac{12}{5},$$

e finalmente l'identità

$$\frac{13}{5} = \frac{13}{5}.$$

Rilevasi da questo esempio che il metodo di risoluzione consiste nel trasformare l'equazione proposta in una serie di equazioni equivalenti, l'ultima delle quali fa conoscere il valore dell' incognita.

Esempio 2.°

Debbasi risolvere l'equazione letterale

$$x - a = \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}.$$

1.° Trasportando il termine supposto cognito $-a$ nel secondo membro con segno contrario e $+\frac{cfx}{de}$, che contiene l'incognita x, nel primo membro con segno parimente contrario, si ha l'equazione equivalente

$$x - \frac{cfx}{de} = \frac{bc}{d} + a.$$

2.° Facendo sparire i denominatori col moltiplicare per de (minimo denominatore comune) tutti i termini dell'equazione, avremo l'altra equazione equivalente

$$dex - cfx = bce + ade.$$

3.° Mettendo x a fattor comune nel primo membro ed e nel secondo, avremo l'equazione equivalente

$$(de-cf)x=(bc+ad)e.$$

4.° Dividendo per $(de-cf)$, coefficiente dell'incognita, ambedue i membri, si ha finalmente

$$x=\frac{(bc+ad)e}{de-cf}.$$

Dunque il valore d'x è

$$\frac{(bc+ad)e}{de-cf},$$

come si può verificare sostituendolo ad x nell'equazione proposta.

Esempio 3.°

Abbiasi l'equazione

$$\frac{3bx}{2a^2}-\frac{x-b}{a+b}=\frac{bx-a^2}{a^2-b^2}-\frac{x}{4a}.$$

Facendo sparire i denominatori col moltiplicare tutti i termini dell'equazione per $4a^2(a^2-b^2)$, minimo multiplo dei denominatori, avremo:

$$3bx\,.\,2(a^2-b^2)-4a^2(a-b)\,(x-b)$$
$$=4a^2(bx-a^2)-xa(a^2-b^2);$$

eseguendo i calcoli, trasportando e riducendo, si troverà:

$$(3a^3-6a^2b+ab^2+6b^3)x=4a^2(ab-b^2+a^2),$$

e finalmente

$$x=\frac{4a^2(ab-b^2+a^2)}{3a^3-6a^2b+ab^2+6b^3}.$$

128. Un'equazione può contenere l'incognita ad un grado diverso dal primo; ma spesso può ridursi al primo grado con opportune trasformazioni,

Esempio 4.°

Sia l'equazione

$$2x^3 - \frac{x^3}{2} + x^2 = 5x^3 - 2x^2.$$

Dividendo per x^2, che è fattor comune di tutti i termini, si ottiene

$$2x - \frac{x}{2} + 1 = 5x - 2,$$

da cui rilevasi facilmente $x = \frac{6}{7}$.

129. Possono spesso ridursi ad equazioni di primo grado anche equazioni aventi l'incognita sotto ad un radicale d'indice qualunque. In tali casi è necessario con opportuni innalzamenti a potenza, seguendo le regole del calcolo dei radicali, fare sparire questi ultimi, come viene indicato dai seguenti esempi.

Esempio 5.°

Abbiasi $\sqrt{x} - 3 = 5.$

Isolando il radicale, si ha

$$\sqrt{x} = 8;$$

ed innalzando al quadrato i due membri (n.° 125 — 3.°), trovasi $x = 64.$

Esempio 6.°

Sia $\sqrt{5+x} + \sqrt{x} = 5.$

Innalzando al quadrato i due membri, l'equazione diviene

$$5 + x + 2\sqrt{x} \times \sqrt{5+x} + x = 25,$$

ossia $$\sqrt{x(5+x)}=10-x;$$
innalzando di nuovo al quadrato e riducendo, si ha l'equazione di primo grado
$$5x=100-20x;$$
e finalmente $$x=4.$$

Esempio 7.°

Sia dato
$$\sqrt{x}+\sqrt{(x-16)}=8.$$
Trasportando si ha:
$$\sqrt{(x-16)}=8-\sqrt{x};$$
innalzando al quadrato ciascun membro, si ottiene:
$$x-16=(8-\sqrt{x})^2=64-16\sqrt{x}+x,$$
da cui
$$-16=64-16\sqrt{x},$$
ovvero
$$16\sqrt{x}=64+16=80,$$
e quindi
$$\sqrt{x}=5,$$
e $$x=25.$$

Esempio 8.°

Abbiasi
$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=b.$$
Moltiplicando il numeratore e il denominatore del primo membro per
$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x},$$

ed osservando che il prodotto della somma di due quantità per la loro differenza uguaglia la differenza dei quadrati delle quantità medesime, l'equazione data si trasforma nella seguente

$$\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}=b;$$

ossia $$\sqrt{a^2-x^2}=bx-a;$$

innalzando al quadrato i due membri in quest'ultima, si ha:

$$2abx=x^2(1+b^2),$$

e dividendo per x,

$$2ab=x(1+b^2);$$

da cui

$$x=\frac{2ab}{1+b^2}.$$

ESERCIZI.

LXVI. Risolvere le seguenti equazioni:

$$8x-5=13-7x.$$

Resultato: $$x=1+\frac{1}{5}.$$

$$13+\frac{5}{4}-\frac{x}{2}=2x-8+\frac{3}{4}.$$

Resultato: $$x=8+\frac{2}{5}.$$

$$2x+7+\frac{3x}{2}=6x-23.$$

Resultato: $$x=12.$$

$$12\frac{1}{4}+3x-6-\frac{7x}{3}=\frac{3x}{4}-5\frac{3}{8}.$$

Resultato: $$x=139\frac{1}{2}.$$

$$\frac{3x}{5}-\frac{7x}{10}+\frac{3x}{4}-\frac{7x}{8}=-15.$$

Resultato: $$x=66\frac{2}{3}.$$

$$3a+x-5b+2=7b-a+c+6.$$

Resultato: $$x=12b-4a+c+4.$$

$$\frac{x+6}{11}-\frac{2x-18}{5}+\frac{2x+3}{4}=5\frac{1}{3}+\frac{3x+4}{12}.$$

Resultato: $$x=5.$$

$$ax+c=bx+d.$$

Resultato: $$x=\frac{d-c}{a-b}.$$

$$a+\frac{c-x}{x}=b-1+\frac{d}{x}.$$

Resultato: $$x=\frac{d-c}{a-b}.$$

$$\frac{5x}{2}-\frac{4x}{3}-13=\frac{5}{8}+\frac{x}{32}.$$

Resultato: $$x=12.$$

$$\frac{7x+9}{4}-\left(x-\frac{2x-1}{9}\right)=7.$$

Resultato: $$x=5.$$

$$13{,}2\times x-\frac{3x}{4}+7{,}6953=\frac{x}{5}+7834{,}5.$$

Resultato: $$x=638{,}92285\ldots\ldots$$

$$\frac{5-x}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{4}-\frac{3x-4}{12}.$$

Resultato: $$x=\frac{25}{3}.$$

$$\frac{ab}{x} = bc + d + \frac{1}{x}.$$

Resultato: $x = \frac{ab-1}{bc+d}$.

$$\frac{2x+3}{x+1} = \frac{4x+5}{4x+4} + \frac{3x+3}{3x+1}.$$

Resultato: $x = 5$.

$$\frac{3a+x}{x} - 5 = \frac{6}{x}.$$

Resultato: $x = \frac{3a-6}{4}$.

$$3,25 \times x - 5,007 - x = 0,2 - 0,34 \times x.$$

Resultato: $x = 2,010424\ldots\ldots$

$$3\frac{2}{3} - x - \frac{9x}{2} + 8 = -17 - \frac{3x}{5} + \frac{3x}{2}.$$

Resultato: $x = 4\frac{23}{48}$.

$$\frac{x}{a} - 1 - \frac{dx}{c} + 3ab = 0.$$

Resultato: $x = \frac{ac(1-3ab)}{c-ad}$.

$$\frac{3bx}{4a^2} - \frac{c^2x}{2ab^2} + \frac{c}{6b} = \frac{a^2x}{3b^3} - 1.$$

Resultato: $x = \frac{-2a^2b^2(6b+c)}{9b^4-2a(2a+3b^2c)}$.

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-4}{x-5} - \frac{x-5}{x-6}.$$

Resultato: $x = 4$.

$$\sqrt{(x-1)} - 1 = 2.$$

Resultato: $x = 10$.

$$\frac{x}{a+3}+\frac{x}{a-3}=\frac{4a^2}{a^2-9}.$$

Resultato: $x=2a.$

$$\frac{x+a}{a}-\frac{2x}{x+a}=3-\frac{x^3-x^2a}{a^3-ax^2}.$$

Resultato: $x=-\frac{2}{3}a.$

$$\sqrt{(x+3)}=4.$$

Resultato: $x=13.$

$$\sqrt{4x}+\sqrt{4x-7}=7.$$

Resultato: $x=4.$

$$\sqrt{x+14}+\sqrt{x-14}=14.$$

Resultato: $x=50.$

$$\sqrt{x+11}+\sqrt{x-9}=10.$$

Resultato: $x=25.$

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x-b}=\sqrt{a-b}.$$

Resultato: $x=a.$

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-16}=8.$$

Resultato: $x=25.$

$$\sqrt{(x-5)}-\sqrt{(x+2)}=-1.$$

Resultato: $x=14.$

$$\sqrt{(2+x)}+\sqrt{x}=\frac{4}{\sqrt{2+x}}.$$

Resultato: $x=\frac{2}{3}.$

Problemi di primo grado ad una incognita.

130. *Porre un problema in equazione* significa esprimere con una o più equazioni le condizioni contenute nell'enunciato del problema stesso.

Su tal proposito mancano assolutamente regole generali e costanti. Solo può dirsi che dopo avere esaminato tanto che basti lo stato del quesito da risolversi, il buon senso prescrive che in virtù de' segni algebrici debbansi sottoporre le incognite a tutte quelle operazioni che faremmo sulle quantità cercate per riconoscere se sodisfano alle condizioni imposte dal problema.

Problema 1.°

Un tale ha comprato 2 metri di panno di differente qualità; il metro della prima qualità costa L. 4 più di quello della seconda, e la somma de' due prezzi, moltiplicata per 8, dà 160; si domanda il prezzo di un metro di panno di ciascuna qualità.

Soluzione.

Rappresentando con x il prezzo d'un metro di panno di prima qualità, $x-4$ sarà quello d'un metro di panno di seconda; e la somma de' due prezzi sarà $2x-4$, la quale, moltiplicata per 8, deve uguagliare 160.

Avremo dunque l'equazione:

$$(2x-4)8=160;$$

dalla quale si rileva successivamente:

$$16x-32=160;$$

$$16x=160+32;$$

$$x=\frac{160+32}{16};$$

$$x=\frac{192}{16}=12.$$

Dunque il metro del panno di prima qualità è costato L. 12, e per conseguenza quello di seconda L. 8.

Prova:

$$(12+8)\times 8=160.$$

Problema 2.°

Si dà ad un operaio L. 1,75 per giorno quando lavora; ma ogni giorno che si riposa gli si ritengono L. 0,80 pel suo nutrimento. Alla fine di 27 giorni egli riceve L. 31,95 per saldo del suo avere. — Si domanda il numero dei giorni di lavoro e il numero dei giorni di riposo.

Soluzione.

Rappresentando con x il numero de' giorni di lavoro, il numero dei giorni di riposo sarà $27-x$; l'operaio avrà guadagnato $1,75\times x$, su cui devesi ritenere pel suo nutrimento $0,80\times(27-x)$; uguagliando dunque la differenza di queste due espressioni alla somma di L. 31,95 che egli riceve, avremo l'equazione

$$1,75\times x-0,80\times(27-x)=31,95;$$

dalla quale ricavasi successivamente:

$$175x-80(27-x)=3195;$$

$$175x-2160+80x=3195;$$

$$175x+80x=3195+2160;$$

$$255x=5355;$$

$$x=\frac{5355}{255}=21.$$

L'operaio adunque ha lavorato 21 giorni e si è riposato 27—21=6 giorni.

Prova:

$$1,75\times21=0,80\times6+31,95,$$

ovvero

$$36,75=36,75.$$

Problema 3.°

Dividere un numero in parti proporzionali a due numeri dati.

Soluzione.

Sia a il numero da dividersi in parti proporzionali ai due numeri m ed n; designando la prima parte con x, l'altra sarà $a-x$, ed avremo la proporzione:

$$x : a-x :: m : n;$$

da cui

$$nx=m(a-x),$$

ovvero

$$nx=ma-mx,$$

equazione, dalla quale ricavasi:

$$nx+mx=ma;$$

$$(n+m)x=ma;$$

$$x=\frac{ma}{n+m}.$$

La prima parte essendo dunque

$$\frac{ma}{n+m},$$

la seconda sarà espressa da

$$a-\frac{ma}{n+m}=\frac{na}{n+m}.$$

Problemi da risolvere.

11. Nell'assedio d'una città, il quale durò 4 giorni, si lanciarono dentro 8000 bombe, ed in ciascun giorno se ne gittava solamente il terzo del giorno precedente. — Quante bombe furono lanciate in ciascun giorno dell'assedio?

Resultato:

Nel 1.° giorno 5400; nel 2.° 1800; nel 3.° 600, e nel 4.° 200.

12. Si vogliono dividere L. 237 in due parti, di cui l'una sia contenuta una volta e $\frac{1}{4}$ nell'altra. — Trovare le due parti.

Resultato: 1.ª L. $105\frac{1}{3}$; 2.ª L. $131\frac{2}{3}$.

13. Trovare due numeri, di cui l'uno sia contenuto m volte nell'altro, e la cui somma sia uguale ad a.

Resultato: 1.° $\frac{a}{m+1}$; 2.° $\frac{ma}{m+1}$.

14. Dividere il numero 46 in due parti tali, che dividendo la prima per 7, e la seconda per 3, la somma dei quozienti sia 10.

Resultato: 1.ª 28; 2.ª 18.

15. Io multiplico un numero per 4, divido il prodotto per 3 e ottengo 24 per quoziente. — Trovate questo numero.

Resultato: Il numero è 18.

16. Due mercanti dividono fra loro L. 1200 in guisa che l'uno non riceve che la metà della parte dell'altro, più L. 50. — Quanto ebbe ciascuno?

Resultato:

Il 1.º L. $766\frac{2}{3}$; il 2.º L. $433\frac{1}{3}$.

17. Io aveva L. 42; ho fatto una spesa e mi è rimasto il triplo di quanto ho speso. — Qual'è stata la spesa?

Resultato: Lire $10\frac{1}{2}$.

18. Un padre ha 21 anni più di suo figlio, e gli anni del figlio sommati con quelli del padre dànno 75 anni. — Qual'è l'età di ciascuno?

Resultato:

Il figlio ha 27 anni; il padre 48.

19. Bottiglie 20 di vino di due specie costarono L. 51,25; il prezzo d'una bottiglia della prima specie era di L. 1,25, e quello della seconda L. 3. — Quante erano le bottiglie di ciascuna specie?

Resultato:

Bottiglie 5 della 1.ª specie; e 15 della 2.ª

20. Due studenti hanno insieme 33 libri. Se l'uno di essi ne avesse 7 di più, avrebbe il triplo dei libri dell'altro. — Quanti libri ha ciascuno?

Resultato: Uno ne ha 23; l'altro 10.

21. Si pensa un numero; moltiplicando questo per

7, aggiungendo 3 al prodotto, dividendo la somma per 2, e togliendo 4 dal quoziente, si ottiene 15. — Trovare il numero pensato.

Resultato: Il numero è 5.

22. Una vedova con due figli e tre figlie per testamento debbono dividersi L. 7500 in maniera, che la parte d'un figlio sia doppia di quella d'una figlia e che la vedova riceva tanto, quanto tutti i suoi figli insieme, più L. 500. — Quanto riceverà ciascuno?

Resultato:

La vedova riceve L. 4000; ciascun figlio L. 1000, e ciascuna figlia L. 500.

23. Un uomo vuol vendere un cavallo, un giardino ed una casa per la somma complessiva di L. 10000; il prezzo del giardino è quadruplo di quello del cavallo, e quello della casa quintuplo di quello del giardino. — Qual è il prezzo di ciascun oggetto?

Resultato:

Il cavallo costa L. 400; il giardino L. 1600, e la casa L. 8000.

24. Trovare tre numeri tali, che dividendo il secondo pel primo si abbia 2 per quoziente e 1 per resto, e dividendo il terzo pel secondo si abbia 3 per quoziente e 3 per resto. — La somma dei tre numeri è 70.

Resultato: I numeri sono 7, 15, 48.

25. — Quante lire hai? — domandava un tale al suo amico. — Ho un numero di lire tale, rispose egli, che se lo moltiplico per 5, tolgo 3 dal prodotto, moltiplico il resto per 4, aggiungo 2 al prodotto e tolgo lo zero che è a destra, resta 23. — Trovare questo numero.

Resultato: Il numero è 12.

26. Due artiglieri tirano delle bombe: il primo aveva già tirato 36 colpi prima che l'altro avesse cominciato, e tira 8 colpi nel tempo che il secondo ne tira 7. Ma il secondo consuma per ogni 3 colpi tanta polvere, quanta ne consuma il primo per 4 colpi. — Quanti colpi dovrà tirare il secondo per consumare tanta polvere, quanta il primo?

Resultato: Colpi 189.

27. Tre persone A, B, C fecero società. B vi pose L. 60 più di A; B e C vi contribuirono in tutto per L. 600. — La società guadagnò L. 320, di cui 136 toccarono a C. — Domandasi il capitale posto da ciascuno.

Resultato:

Capitale di A: L. 200; di B: L. 260; di C: L. 340.

28. Per una guerra imminente le tre città A, B, C, devono dare il loro contingente di 594 uomini; ed il numero spettante a ciascuna dev' esser proporzionale alla rispettiva popolazione. Ora, se la popolazione di A sta a quella di B come 3 a 5; e se la popolazione di B sta a quella di C come 8 a 7, domandasi quanti uomini deve dare ciascuna città.

Resultato:

A, uomini 144; B, 240; C, 210.

29. Un'armata in una disfatta perdette un sesto dei suoi soldati tra morti e feriti, più 4000 prigionieri; ebbe poi un rinforzo di 3000 uomini, ma nel ritirarsi perdette ancora un quarto de' suoi soldati, e così l'armata si trovò ridotta a 18000 uomini: quanti soldati costituivano la primitiva armata?

Resultato: Soldati 30000.

50. Una cisterna è munita di due condotti e di una tromba; aprendo solo il primo condotto la cisterna si empie in 6 giorni, ed aprendo solo il secondo si empirebbe in 8 giorni; invece, se i condotti fossero chiusi e si facesse agire la tromba, la cisterna si vuoterebbe in 12 giorni. — Quanti giorni occorrono per empire la cisterna tenendo aperti i due condotti e facendo agire la tromba?

Resultato: Giorni $4+\frac{4}{5}$.

APPLICAZIONE ALLA GEOMETRIA.

31. *In un trapezio l'area è di* s *metri quadrati, l'altezza è* h *metri, e le due basi parallele stanno fra loro come* m *a* n*; trovare la lunghezza di queste basi.*

Soluzione.

Indicando con b e b' le basi, per teorema noto abbiamo:

$$s=\left(\frac{b+b'}{2}\right)h;$$

da cui

$$b+b'=\frac{2s}{h};\ldots.\ (1)$$

ma per ipotesi

$$b:b'::m:n,$$

da cui, *componendo*, si ha:

$$b+b':b::m+n:m,$$
$$b+b':b'::m+n::n.$$

Sostituendo in queste due proporzioni a $b+b'$ il

loro valore (1) $\frac{2s}{h}$, si ha

$$\frac{2s}{h} : b :: m+n : m.,$$

$$\frac{2s}{h} : b' :: m+n : n.$$

Dalle quali rilevasi facilmente

$$b = \frac{2sm}{h(m+n)}, \quad \text{e} \quad b' = \frac{2sn}{h(m+n)}.$$

32. *Le dimensioni d'un parallelepipedo rettangolo sono* a, b, c *metri; determinare il lato d'un cubo per modo che le superficie dei due solidi sieno nel medesimo rapporto dei loro volumi.*

Soluzione.

Rappresentando con x il lato del cubo richiesto, la sua superficie è espressa da $6x^2$; quella del parallelepipedo è $2(ab+ac+bc)$; il volume del cubo è x^3, e quello del parallelepipedo è abc; avremo dunque l'equazione

$$\frac{6x^2}{2(ab+ac+bc)} = \frac{x^3}{abc};$$

ovvero

$$\frac{3x^2}{ab+ac+bc} = \frac{x^3}{abc};$$

da cui, dividendo per x^2 i due membri,

$$\frac{3}{ab+ac+bc} = \frac{x}{abc};$$

e da questa

$$x = \frac{3abc}{ab+ac+bc}.$$

— 33. L'area d'un trapezio è di metri quadrati 320; l'altezza è di 5 decametri, e le due basi parallele stanno fra loro come 2 a 3; trovare la lunghezza di queste basi.

Resultato: $b=5^m, 12$; e $b'=7^m, 68$.

34. Le dimensioni d'un parallelepipedo rettangolo sono 8^m, 5^m, 2^m; determinare il lato d'un cubo tale, che le superficie dei due solidi sieno nello stesso rapporto dei loro volumi.

Resultato: $x=3^m, 6363 \ldots\ldots$

35. Un rettangolo ha la base doppia dell'altezza, ed aumentando ogni lato d'un metro, la sua superficie viene aumentata di 10 metri quadrati. — Trovare la lunghezza de' suoi lati.

Resultato: I lati sono: 3^m e 6^m.

36. Quali sono i lati d'un rettangolo che stanno fra loro come 4 a 3, e tali, che aumentando la lunghezza di 3 metri e la larghezza di 4, l'area viene aumentata di 287 metri quadrati?

Resultato: I lati sono: 44^m e 33^m.

Equazioni di primo grado a due incognite.

131. Un'equazione di primo grado a due incognite ammette un'infinità di soluzioni.

Sia, infatti, l'equazione $y=5x-3$.

Ad ogni valore arbitrario dato ad x, corrisponde per y un valore che non è più arbitrario, ma che dipende da quello attribuito ad x. — Facendo $x=1$, si ha $$y=5-3=2.$$

Dando ad x il valore 2, si ha

$$y=10-3=7.$$

E così via di seguito. Queste operazioni si chiamano *soluzioni dell' equazione:* e poichè sono in numero infinito, si dice che il problema cui si riferisce l'equazione è *indeterminato*, cioè può essere soddisfatto da un'infinità di valori interi o frazionari [1].

132. Allorchè si hanno due equazioni e due incognite l' indeterminazione sparisce, perchè in tal caso non si può più dare ad una un valore arbitrario, dovendo i valori di tutte e due verificare al tempo stesso entrambe le equazioni.

133. Per risolvere due equazioni contenenti due incognite fa d' uopo combinarle fra loro per modo da ricavarne una sola con una sola incognita. — Allora si dice che l' altra incognita è rimasta *eliminata.*

134. I metodi d' eliminazione più usati son tre; e si chiamano:

1.° *Per sostituzione;*
2.° *Per confronto o per paragone;*
3.° *Per addizione e sottrazione.*

135. Metodo per sostituzione. — Questo metodo consiste nel ricavare da una delle equazioni proposte il valore d' una delle incognite, come se l' altra fosse cognita, e nel sostituire questo valore nell' altra equazione; si ottiene così una sola equazione ad una incognita, la quale si risolve col metodo ordinario.

(1) Intendasi lo stesso per un problema che desse luogo a due equazioni con tre incognite; a tre equazioni con quattro incognite, ecc. Se poi un problema tradotto in linguaggio algebrico offrisse più equazioni che incognite, è da ritenersi che esso sarebbe *più che determinato.*

Esempio.

Sieno le due equazioni simultanee

$$(1) \ldots\ldots 5x-3y=9,$$
$$(2) \ldots\ldots 7x+11y=43.$$

Ricavando dalla (1) il valore d'y, come se il valore d'x fosse noto, si avrà

$$(3) \ldots\ldots y=\frac{5x-9}{3}.$$

Sostituendo questa espressione ad y nell'equazione (2), si ottiene:

$$(4) \ldots\ldots 7x+11\left(\frac{5x-9}{3}\right)=43.$$

Risolvendo questa equazione col metodo insegnato, si avrà successivamente:

$$7x+\frac{55x-99}{3}=43.$$
$$21x+55x-99=129;$$
$$76x=129+99;$$

e fialmente

$$x=\frac{228}{76}=3.$$

Sostituendo ora questo valore ad x nell'equazione (3), si ha

$$y=\frac{15-9}{3}=\frac{6}{3}=2.$$

Dunque

$$x=3, \quad \text{e} \quad y=2.$$

Tali sono i valori delle due incognite, come si potrebbero facilmente verificare, sostituendoli nelle due equazioni proposte.

136. Metodo per confronto. — Consiste nel ricavare da ciascuna delle due equazioni date il valore d'una stessa incognita, riguardando l'altra come cognita, e nell'uguagliare questi due valori. — Da ciò resulta un'equazione di primo grado ad una sola incognita, che è facile risolvere. — Ciò fatto, si determina l'altra incognita eliminata, sostituendo in una delle espressioni che la rappresentano, il valore trovato per l'altra incognita.

Esempio.

Riprendiamo le due equazioni

$$(1) \ldots\ldots 5x-3y=9,$$
$$(2) \ldots\ldots 7x+11y=43.$$

Risolvendo queste due equazioni rispetto ad x, si avrà:

$$(3) \ldots\ldots x=\frac{9+3y}{5},$$

$$(4) \ldots\ldots x=\frac{43-11y}{7}.$$

Ora, poichè *due quantità uguali ad una terza sono uguali fra loro*, avremo:

$$(5) \ldots\ldots \frac{9+3y}{5}=\frac{43-11y}{7};$$

equazione di primo grado ad una sola incognita y, la quale, risoluta col metodo ordinario, darà

$$y=2.$$

Sostituendo ora 2 a y nell' equazione (3), si troverà:

$$x=\frac{9+(3\times2)}{5}=3.$$

Dunque

$$x=3, \quad \text{e} \quad y=2.$$

137. Metodo per addizione e sottrazione. — Esso consiste nel rendere primieramente uguali i coefficienti della stessa incognita che si vuole eliminare in ciascuna equazione (il che si ottiene moltiplicando i termini della prima equazione pel coefficiente dell' incognita da eliminarsi nella seconda, e reciprocamente), e nel sottrarre o sommare le due equazioni ottenute, secondochè i due termini contenenti l'incognita da eliminarsi hanno segno uguale o contrario.

Esempio.

Abbiansi le stesse equazioni

$$(1) \ldots\ldots 5x-3y=9,$$
$$(2) \ldots\ldots 7x+11y=43.$$

Moltiplicando tutti i termini della equazione (1) per 7, coefficiente d' x nella (2), e tutti i termini di questa per 5, coefficiente della stessa incognita nella (1), avremo:

$$(3) \ldots\ldots 35x-21y=63,$$
$$(4) \ldots\ldots 35x+55y=215.$$

Sottraendo ora la (3) dalla (4) membro a membro, perchè il termine in x vi ha segno uguale, si ottiene

$$55y+21y=215-63,$$

ovvero

$$76y=152,$$

da cui

$$y=\frac{152}{76}=2.$$

Sostituendo questo valore 2 ad y nell'equazione (1), si ottiene

$$5x-6=9; \quad \text{e} \quad x=\frac{15}{5}=3.$$

Dunque

$$x=3, \quad e \quad y=2.$$

In tal guisa è scomparsa l'incognita x. Che se avessimo voluto eliminare y, sarebbe stato necessario e sufficiente moltiplicare per 11 la 1.ª equazione, per 3 la 2.ª, e poi sommare membro a membro le equazioni ottenute.

Notisi che questo artifizio riuscirebbe più speditivo non solo quando l'incognita da eliminarsi avesse lo stesso coefficiente, ma eziandio quando i coefficienti suoi, benchè diversi, non fossero primi fra loro.

Questo metodo d'eliminazione è senza dubbio quello che conduce ordinariamente a calcoli meno complicati, ed è perciò il più in uso.

ESERCIZI.

LXVII. Risolvere coi tre metodi i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x-y=b. \end{cases}$$

Resultato: $x=\frac{a+b}{2}, \quad y=\frac{a-b}{2}.$

$$\begin{cases} 3x+2y=118, \\ x+5y=191. \end{cases}$$

Resultato: $x=16, \quad y=35.$

$$\begin{cases} 5x-8\frac{1}{2}=7y-44, \\ 2x=y+\frac{5}{7}. \end{cases}$$

Resultato: $x=4\frac{1}{2}, \quad y=8\frac{2}{7}.$

$$\begin{cases} 7y = 2x - 3y, \\ 19x = 60y + 621\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Resultato: $x = 88\frac{3}{4}, \quad y = 17\frac{3}{4}.$

$$\begin{cases} x + y = 18,75, \\ 0,56 \times x + 13,421 \times y = 763,4. \end{cases}$$

Resultato: $x = -39,8121\ldots, \quad y = 58,5421\ldots.$

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \\ \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1. \end{cases}$$

Resultato: $x = \frac{ab}{a+b}, \quad y = \frac{ab}{a+b}.$

$$\begin{cases} ax = by, \\ x + y = c. \end{cases}$$

Resultato: $x = \frac{bc}{a+b}, \quad y = \frac{ac}{a+b}.$

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ fx + gy = h. \end{cases}$$

Resultato: $x = \frac{cg - bh}{ag - bf}, \quad y = \frac{ah - cf}{ag - bf}.$

$$\begin{cases} 2x + \frac{y}{8} = 75. \\ \frac{x}{5} - \frac{y}{8} = 2. \end{cases}$$

Resultato: $x = 35, \quad y = 40.$

$$\begin{cases} 8x - 6y = 38, \\ 12y + 8x = 164. \end{cases}$$

Resultato: $x = 10, \quad y = 7.$

$$\begin{cases} \dfrac{12}{x} + \dfrac{8}{y} = 8, \\ \dfrac{27}{x} - \dfrac{12}{y} = 3. \end{cases}$$

Resultato: $x=3, \quad y=2.$

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{8} + \dfrac{x-y}{6} = 5. \\ \dfrac{x+y}{4} - \dfrac{x-y}{3} = 10. \end{cases}$$

Resultato: $x=20, \quad y=20.$

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{y-1} = \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{x+1}{y-1} = 1. \end{cases}$$

Resultato: $x=5, \quad y=7.$

$$\begin{cases} (a+h)x+(b-h)y=c, \\ (b+k)x+(a-k)y=c. \end{cases}$$

Resultato: $x=\dfrac{c}{a+b}, \quad y=\dfrac{c}{a+b}.$

Problemi di primo grado a due incognite.

Problema 1.°

Un mercante ha due specie di vino: quando le mescola nel rapporto di 2 a 3, l'ettolitro vale L. 21; e quando le mescola nel rapporto di 7 a 8, il valore dell'ettolitro aumenta di 1 lira. — Qual è il prezzo d'un ettolitro di vino di ciascuna specie?

Soluzione.

Sieno x e y i due prezzi domandati; la prima condizione del problema dà l'equazione

$$2x+3y=21\times5,$$

e la seconda

$$7x+8y=22\times15,$$

da cui

$$x=30, \quad y=15.$$

Dunque il vino della prima specie costa L. 30 l'ettolitro e quello della seconda L. 15.

Problema 2.°

Un tale che non ha che monete da L. 5 e da L. 2, vuol pagare L. 53 con 16 monete. — Quante monete da L. 5 e quante da L. 2 dovrà dare?

Soluzione.

Sia x il numero delle monete da L. 5 e y quello delle monete da L. 2; l'enunciato del problema ci dà immediatamente le due equazioni

$$x+y=16,$$
$$5x+2y=53;$$

da cui

$$x=7, \quad y=9.$$

Dunque dovrà dare 7 monete da L. 5 e 9 monete da L. 2.

Problemi da risolvere.

37. Trovare due numeri, la cui somma sia 70 e la differenza 16.

Risultato: I numeri sono 43 e 27.

38. Due borse contengono insieme L. 300; togliendone 30 dall'una e ponendole nell'altra, le due borse contengono un egual numero di lire. — Trovare quante ne contiene ciascuna borsa.

Resultato: La prima 180; la seconda 120.

39. A e B posseggono insieme L. 570; se A avesse il triplo di ciò che possiede, e B il quintuplo, avrebbero insieme L. 2350. — Quanto ha ciascuno?

Resultato: A: L. 250; B: L. 320.

40. Si hanno due numeri: moltiplicando il primo per 2, il secondo per 5, e sommando i prodotti, la somma è 31; ma moltiplicando il primo per 7, il secondo per 4, la somma dei prodotti è 68. — Trovare i due numeri.

Resultato: I due numeri sono 8 e 3.

41. Trovare due numeri tali, che aggiungendo 4 al primo, la somma sia uguale al secondo moltiplicato per $3\frac{1}{4}$; e aggiungendo 8 al secondo, la somma non sia che la metà del primo.

Resultato: I due numeri sono 48 e 16.

42. Un tale ha 54 monete da 30 soldi e da 10 soldi, che insieme valgono 64 lire. — Quante ne ha di ciascuna specie?

Resultato:

Ne ha 37 da 30 soldi, e 17 da 10 soldi.

43. Trovare due numeri, la cui somma sia 13, e di cui la differenza dei quadrati sia 39.

Resultato: I due numeri sono 5 e 8.

44. Un numero formato di due cifre è uguale a 5 volte la somma delle sue cifre; e se il detto nu-

mero si aumenta di 9, si ha per somma lo stesso numero rovesciato: trovare tal numero.

Resultato: Il numero richiesto è 45.

45. Il tempo che consuma un treno diretto a percorrere una distanza di 120 chilometri sta a quello che consuma un treno misto per percorrere la stessa distanza, come 9 a 14. Il tempo che perde il treno misto per le fermate equivale al tempo che consumerebbe a percorrere 20 chilometri senza fermate. Il tempo poi che perde il treno diretto per le fermate equivale alla metà del tempo che perde il treno misto, ed inoltre esso fa 15 chilometri di più in ogni ora. — Trovare la velocità di ciascun treno.

Resultato:

Velocità del 1.° : 45 chilom. l'ora;
» » 2.° : 30 » »

APPLICAZIONE ALLA GEOMETRIA.

46. *Calcolare il lato d'un quadrato, conoscendo la somma di questo lato colla diagonale del quadrato stesso.*

Soluzione.

Rappresentando con d la diagonale, con l il lato e con s la loro somma, si hanno le due equazioni

$$d^2=2l^2;\quad s=d+l.$$

Dalla prima si ricava

$$d=l\sqrt{2};$$

sostituendo questo valore nella seconda, si ha

$$s=l\sqrt{2}+l,$$

ovvero

$$s=l(\sqrt{2}+1),$$

e da questa

$$l=\frac{s}{\sqrt{2}+1}.$$

47. La superficie convessa d'un cilindro è metri quadrati 21,9912, e il suo volume metri cubi 307,8768. — Calcolare il raggio della base e l'altezza.

Resultato: $r=28^m$; $h=0^m,125$.

48. Qual'è l'area d'un rettangolo, sapendo che la somma della base coll'altezza è 22^m, e il loro rapporto è $\frac{9}{2}$?

Resultato: $a=$ Metri quadrati 72.

49. La somma della diagonale d'un quadrato col suo lato è di 9^m, 656. — Trovare il valore numerico del lato.

Resultato: $l=4^m$.

50. Trovare la superficie d'un rettangolo, sapendo che la somma della base coll'altezza è 20^m, e il rapporto di queste due dimensioni è :: 6 : 2.

Resulato: Superficie = Metri quadrati 75.

51. Vi è un certo pavimento rettangolare tale, che, se fosse 2 metri più largo e 3 metri più lungo, sarebbe 64 metri quadrati più esteso; se invece fosse 3 metri più largo e 2 metri più lungo, la sua area conterrebbe 68 metri quadrati di più. — Trovare la lunghezza e la larghezza del pavimento.

Resultato: Lunghezza 14 metri;
Larghezza 10 »

52. Calcolare il raggio R della base e l'altezza H d'un cilindro, di cui si conoscono la superficie convessa S e il volume V.

Resultato:

$$R=\frac{2V}{S}, \quad H=\frac{S^2}{4\pi V}.$$

Equazioni di primo grado a tre e piú incognite.

138. Sono necessarie tre equazioni per determinare tre incognite; perchè avendone solamente due, si potrebbe prendere arbitrariamente una delle incognite e determinare le altre due per mezzo delle equazioni date; vi sarebbe dunque una infinità di soluzioni, come per un' equazione con due incognite.

139. Per risolvere tre equazioni di primo grado a tre incognite, si elimina successivamente la stessa incognita fra l'una di esse e ognuna delle altre due, giovandosi d' uno dei tre metodi già assegnati per un sistema di due equazioni; da ciò resultano due equazioni a due incognite; si determinano queste ultime e si sostituiscono i loro valori in una delle equazioni proposte, onde dedurne la terza incognita.

Esempio.

Abbiasi il sistema di tre equazioni

$$(1) \ldots\ldots 2x+5y-3z=10,$$
$$(2) \ldots\ldots 4x-2y+5z=37,$$
$$(3) \ldots\ldots 7x+3y-6z=-6.$$

Eliminiamo primieramente z fra la prima e la se-

conda equazione; facendo uso del terzo metodo (numero 136) bisogna moltiplicarle rispettivamente per 5 e per 3, e così si ottiene il sistema equivalente

$$(4) \ldots\ldots 10x+25y-15z=50,$$
$$(5) \ldots\ldots 12x-6y+15z=111.$$

Sommandole termine a termine, perchè i segni dei termini contenenti l'incognita che eliminiamo sono contrari, si ha:

$$(6) \ldots\ldots 22x+19y=161.$$

Eliminando z collo stesso metodo fra la prima e la terza delle equazioni date, si troverà

$$(7) \ldots\ldots 3x-7y=-26.$$

Ora, dalle equazioni (6) e (7) le quali non contengono che x e y, si ricaverà facilmente

$$x=3, \quad \text{e} \quad y=5.$$

Sostituendo questi valori nella prima delle equazioni proposte, avremo

$$6+25-3z=10;$$

da cui $$z=7.$$

Dunque $x=3, \quad y=5, \quad z=7.$

140. Da ciò che precede si deduce la regola generale seguente:

Per risolvere m *equazioni di primo grado ad* m *incognite, si elimina successivamente la stessa incognita fra l'una delle equazioni date e le* m—1 *che restano; da ciò resultano* m—1 *equazioni di primo grado ad* m—1 *incognite. Eliminando una nuova incognita fra l'una di queste ultime equazioni e le* m—2 *altre, si ottengono* m—2 *equazioni ad* m—2 *incognite, e così di seguito, sino a che si giunga ad una sola equazione, la quale contenga una sola incognita.*

Esempio.

Abbiasi il sistema

$$(1) \ldots\ldots 3x+2y-z-u=0,$$
$$(2) \ldots\ldots 2x-y+z+3u=15,$$
$$(3) \ldots\ldots x+5y-7z+u=20,$$
$$(4) \ldots\ldots x-3y-5z-u=6.$$

Eliminando primieramente u fra la prima e le altre tre, facendo uso del terzo metodo, si troverà

$$(5) \ldots\ldots 11x+5y-2z=15,$$
$$(6) \ldots\ldots 4x+7y-8z=20,$$
$$(7) \ldots\ldots 2x+5y+4z=-6.$$

Eliminando ora z fra la prima di queste tre equazioni e le altre due, si ha

$$(8) \ldots\ldots 80x+26y=80,$$
$$(9) \ldots\ldots 32x+68y=32.$$

Eliminando finalmente y fra queste due ultime, si ottiene

$$6272x=6272;$$

da cui

$$x=1.$$

Sostituendo $x=1$ in una delle equazioni (8) (9), si troverà $y=0$; sostituendo $x=1$, $y=0$ in una delle equazioni (5) (6) (7), si trova $z=-2$; sostituendo finalmente $x=1$, $y=0$, $z=-2$ in una delle equazioni proposte, si troverà $u=5$.

Dunque

$$x=1, \quad y=0, \quad z=-2, \quad u=5.$$

141. Quanto alla scelta del metodo per l'elimina-

zione delle incognite, noteremo che l'eliminazione *per confronto* o *per paragone* si usa rare volte per causa della sua lunghezza; quella per *sostituzione* riesce più vantaggiosa allorchè non tutte le incognite entrano in tutte le equazioni; quella poi per *addizione* e *sottrazione* è la preferibile, perchè la più breve e forse la più generale.

112. Abbiasi il sistema

$$(1) \ldots\ldots x+y=a,$$
$$(2) \ldots\ldots x+z=b,$$
$$(3) \ldots\ldots y+z=c;$$

tale, cioè, che le incognite non entrino in tutte le equazioni.

Ecco il modo di risolverlo.

Ricavando dall'equazione (1) il valore d'x, si ha

$$x=a-y.$$

Sostituendo questo valore nella (2), avremo:

$$a-y+z=b,$$

e da questa

$$z=b-a+y.$$

Sostituendo questo valore nella (3), si ottiene:

$$y+b-a+y=c,$$

da cui

$$2y=a-b+c,$$

ovvero

$$y=\frac{a-b+c}{2}.$$

Sostituendo questo valore nella (1), avremo:

$$x+\frac{a-b+c}{2}=a,$$

da cui facilmente si ricava

$$x=\frac{a+b-c}{2}.$$

Finalmente, sostituendo il valore d'y nella (3), si avrà

$$\frac{a-b+c}{2}+z=c,$$

d' onde

$$z=\frac{b+c-a}{2}.$$

Dunque

$$x=\frac{a+b-c}{2},\quad y=\frac{a+c-b}{2},\quad z=\frac{b+c-a}{2}.$$

Altri esempi.

Abbiasi il sistema

$$\begin{aligned}
&(1)\ldots\ldots 2x+7y=29,\\
&(2)\ldots\ldots 2t-3x=8,\\
&(3)\ldots\ldots 3t-2z=26,\\
&(4)\ldots\ldots 4x+3z=22.
\end{aligned}$$

Poichè y non entra che nella (1), lascio questa equazione. — Dalle altre trè deduco come sopra

$$x=4,\quad z=2,\quad t=10;$$

sostituendo poi il valore d'x nella (1), ottengo

$$y=3.$$

Abbiasi infine il sistema

$$\begin{aligned}
&(1)\ldots\ldots a=cy+bz,\\
&(2)\ldots\ldots b=cz+az,\\
&(3)\ldots\ldots c=bx+ay.
\end{aligned}$$

Per avere il valore d'x, moltiplico i due membri della (1) per a, i due membri della (2) per b, i due membri della (3) per c; tolgo dalla (1) la somma delle altre due, ed ottengo

$$x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Trovato il valore d'x, si deducono facilmente i valori d'y e di z.

ESERCIZI.

LXVIII. Risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x+y-2z=7, \\ x-2y+z=1, \\ 3z-x-y=3. \end{cases}$$

Resultato: $x=15, \quad y=12, \quad z=10.$

$$\begin{cases} 2x+5y-7z=-288, \\ 5x-y+3z=227, \\ 7x+6y+z=297. \end{cases}$$

Resultato: $x=13, \quad y=24, \quad z=62.$

$$\begin{matrix} 7x+3y-2z=16, \\ 2x+5y+3z=39, \\ 5x-y+5z=31. \end{matrix}$$

Resultato: $x=2, \quad y=4, \quad z=5.$

$$\begin{cases} x+y+z=30, \\ 8x+4y+2z=50, \\ 27x+9y+3z=64. \end{cases}$$

Resultato: $x=\frac{2}{3}, \quad y=-7, \quad z=36\frac{1}{3}.$

$$\begin{cases} 18x-7y-3z=11, \\ 4\frac{2}{5}y-\frac{2x}{3}+z=108, \\ 3\frac{1}{2}z+2y+\frac{3x}{4}=80. \end{cases}$$

Resultato: $x=12,\quad y=25,\quad z=6.$

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1, \\ \frac{5}{x}+\frac{4}{y}+\frac{6}{z}=24, \\ \frac{7}{x}-\frac{8}{y}+\frac{9}{z}=14. \end{cases}$$

Resultato: $x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{2}{3},\quad z=\frac{3}{4}.$

$$\begin{cases} x-9y+3z-10u=21, \\ 2x+7y-z-u=683, \\ 3x+y+5z+2u=195, \\ 4x-6y-2z-9u=516. \end{cases}$$

Resultato:

$$x=100,\quad y=60,\quad z=-13,\quad u=-50.$$

$$\begin{cases} x+y+z+u=1, \\ 16x+8y+4z+2u=9, \\ 81x+27y+9z+3u=36, \\ 256x+64y+16z+4u=100. \end{cases}$$

Resultato:

$$x=\frac{1}{4},\quad y=\frac{1}{2},\quad z=\frac{1}{4},\quad u=0.$$

Problemi di primo grado a più incognite.

Problema 1.°

Un mercante vende: 1.° 16 bottiglie di vino di Champagne, 7 di vino di Bourgogne e 10 di vino d'Arbois per L. 80; 2.° 8 bottiglie di vino di Champagne, 9 di vino di Bourgogne e 5 di vino d'Arbois per L. 51; 3.° 6 bottiglie di vino di Champagne, 3 di vino di Bourgogne e 2 di vino d'Arbois per L. 29. — Quanto costa una bottiglia di ciascuna specie di vino?

Soluzione.

Sieno x, y e z i prezzi rispettivi d'una bottiglia di vino di ciascuna specie; formeremo facilmente le tre equazioni:

$$16x+7y+10z=80,$$
$$8x+9y+5z=51,$$
$$6x+3y+2z=29.$$

Per eliminare z, basta sottrarre successivamente le due ultime equazioni dalla prima, dopo averle moltiplicate per 2 e per 5, e si ha

$$-11y=-22,$$
$$-14x-8y=-65;$$

l'una di queste dà $y=2$, e sostituendo nell'altra, si trova $x=3,50$. Portando questi valori d'x e d'y nell'una delle equazioni iniziali, se ne deduce $z=1$.

Dunque, la bottiglia di vino di Champagne costa L. 3,50; quella di vino di Bourgogne L. 2; e quella di vino d'Arbois L. 1.

Problema 2.°

La data dell' invenzione della stampa è espressa da un numero di 4 cifre. La cifra delle unità ha un valore doppio di quello della cifra delle diecine; l' eccesso del valore della cifra delle centinaia su quello della cifra delle diecine dà la cifra delle migliaia; la somma delle 4 cifre è 14. Aggiungendo al numero cercato il numero 4905, si ottiene un numero che ha le cifre di quello domandato, ma scritte inversamente. — Qual' è la data?

Soluzione.

Indichiamo con x, y, z, u le cifre del numero, che in forma algebrica sarà espresso dal polinomio

$$1000x+100y+10z+u.$$

Soddisfacendo ai dati del problema, si hanno le seguenti equazioni:

$$u=2z;\quad y-z=x;\quad x+y+z+u=14;$$

$$1000x+100y+10z+u+4905$$
$$=1000u+100z+10y+x.$$

L'ultima equazione, fatte le riduzioni, diviene

$$111u+10z-10y-111x=545.$$

Risoluto il sistema, abbiamo

$$x=1,\quad y=4,\quad z=3,\quad u=6;$$

quindi la data della gloriosa invenzione di Guttemberg è 1436.

Problemi da risolvere.

53. Determinare il numero degli anni di tre fratelli, sapendo che l'età dell'uno, aumentata di quella del-

l'altro e diminuita del doppio dell' età del terzo, dà 7 anni; che l'età del primo, diminuita del doppio di quella dell'altro e aumentata dell'età del terzo, dà 1 anno; e che il triplo dell'età del terzo, diminuito di quella degli altri due, dà 3 anni.

Resultato: $x=15$, $y-12$, $z=10$.

54. A, B, C hanno insieme L. 1820. Se B dà ad A. L. 200, allora A possiede L. 160 più di B; ma se B riceve L. 70 da C, i due hanno la stessa somma. — Quanto ha ciascuno?

Resultato:

A: L. 400; B: L. 640; C.: 780.

55. Tre persone hanno speso insieme una certa somma che debbon pagare per egual porzione. A disse a B: dammi il quarto di ciò che hai, e allora potrò pagare la mia quota. B disse a C: dammi $\frac{1}{8}$ di ciò che hai, e potrò pagare anch'io quanto debbo. C disse ad A: sebbene io non abbia che L. 4, se tu mi dài la metà del tuo denaro, potrò pagare il mio dare. — Quanto hanno speso? E quanto hanno A e B?

Resultato:

L. $6\frac{1}{2}$ è la quota; e L. $19\frac{1}{2}$ la somma da pagarsi fra tutti e tre. — A possiede L. 5, e B L. 6.

56. Trovare tre numeri tali, che il primo ed il secondo sommati dieno 80; che il primo differisca dal terzo di 36 in meno, e che il terzo sia 12 unità minore del secondo.

Resulato: $x=52$; $y=28$; $z=16$.

57. A, B, C hanno complessivamente L. 96. A dà a B e a C quanto hanno di già; poi B dà ad A e a C quanto hanno di già, e C fa lo stesso rispetto ad A e a B; così tutti e tre hanno la stessa somma. — Quanto aveva ciascuno in principio?

Resultato: A: L. 52; B: L. 28; C: L. 16.

58. Un operaio ha lavorato per 74 giorni in tre luoghi, guadagnando giornalmente nel primo luogo 36 soldi, nel secondo 30, e nel terzo 24, e ciò non ostante ricevè durante questo tempo un'egual somma in ciascun luogo. — Quanti giorni lavorò in ciascun luogo?

Resultato:

Nel 1.°: giorni 20; nel 2.: 24; nel 3.°: 30.

59. Un negoziante ha vino in tre botti, ma non ne ha un'egual quantità in ciascuna. Egli versa nella seconda botte l'ottava parte dell'intero contenuto nella prima; poi versa nella terza botte l'ottava parte dell'intero contenuto nella seconda, e finalmente versa nella prima botte l'ottava parte dell'intero contenuto nella seconda. Poi misura il contenuto delle tre botti, e trova in ciascuna 98 litri. — Quanti litri conteneva ciascuna botte dapprincipio?

Resultato: $x=96$; $y=100$; $z=98$.

60. I titoli di quattro verghe d'argento sono 0,40, 0,55, 0,73, 0,85: si vuol fare con esse una quinta verga al titolo di 0,70, e del peso di 320 grammi, la quale contenga della seconda verga una quantità doppia di quella della prima, e della quarta una quantità tripla di quella della terza. — Quanti grammi occorreranno di ciascuna verga?

Resulato:

Le quantità richieste per ciascuna verga sono rispettivamente: grammi 40, 80, 50, 150.

APPLICAZIONE ALLA GEOMETRIA.

61. I lati d'un triangolo sono tali, che sommati due a due, danno successivamente per resultati 150, 140 e 130 metri. — Qual'è la lunghezza di ciascuno di essi?

Resultato: $x=80^{m}$, $y=70^{m}$, $z=60^{m}$.

62. La somma dei lati d'un trapezio è di 34 metri; la metà dei tre ultimi, meno il primo, uguaglia 2; la somma del primo col terzo sorpassa di 8 la somma degli altri due; finalmente la somma dei primi tre, diminuita di 6, uguaglia il sestuplo del quarto. — Trovare la lunghezza di ciascun lato.

Resultato: $x=10^{m}$, $y=9^{m}$, $z=11^{m}$, $v=4^{m}$.

63. Trovare l'area d'un rettangolo, sapendo che la somma della base coll'altezza è di 15^{m}, e che il loro rapporto è di $\frac{3}{4}$.

Risultato: $a=55$ m. q., 1020....

64. Trovare i lati d'un triangolo, sapendo che il perimetro è 83^{m}; che togliendo 7^{m} dal primo e dal secondo, i resti sono nel rapporto di 5 a 3; che togliendo 3 dal secondo e dal terzo, i resti stanno fra loro :: 11 : 9.

Resultato: Lati 37^{m}, 25^{m}, 21^{m}.

Soluzioni negative.

143. Dicemmo (n.° 12) che un polinomio indica una serie di addizioni e sottrazioni da eseguirsi, e chiamammo *quantità positive* le quantità da sommarsi, e *quantità negative* le quantità da sottrarsi. Un polinomio riducendosi in ultima analisi ad una quantità da sommarsi o da sottrarsi, ha nel primo caso un valore positivo, e nel secondo un valore negativo. — La considerazione delle quantità positive e negative è utilissima nella soluzione dei problemi. Essa dà il mezzo, come vedremo, di comprendere nelle stesse equazioni, e per conseguenza nelle stesse formule, i differenti casi d' uno stesso problema.

Problema 1.°

144. *Un padre ha 51 anni e suo figlio ne ha 27. — In quanti anni l'età del padre sarà doppia di quella del figlio?*

Soluzione.

Sia x il numero d' anni richiesto; avremo l'equazione

$$x+51=(x+27)2;$$

da cui

$$54+2x=51+x;$$

e da questa

$$x=-3.$$

Ora, poichè un numero d' anni da trascorrere non può essere negativo, è chiaro che la soluzione è di per sè stessa assurda, e che perciò avvi difetto nell'enunciato del problema; vale a dire che il numero

di anni richiesto è già passato. Giova dunque correggere l' enunciato dicendo:

Un padre ha 51 anni, e suo figlio ne ha 27; quanti anni sono passati da che l' età del padre era doppia di quella del figlio?

In questo caso l' incognita ha un senso contrario, giacchè si tratta del passato invece che del futuro; per conseguenza, se innanzi le si conveniva il segno dell' addizione, or le si deve appropriare quello della sottrazione. In tal modo avremo:

$$51-x=(27-x)2;$$

da cui

$$51-x=54-2x;$$

ovvero

$$54-2x=51-x;$$

e da questa

$$x=3.$$

Sicchè son passati 3 anni da che le età suddette avevano la relazione cercata; e si vede che il nuovo valore dell'incognita è uguale al primitivo, fatta astrazione dal segno; cioè che il cambiamento del segno all' incognita ha servito a correggere il difetto dell' enunciato, e a render possibile la soluzione.

Problema 2.°

145. *Per causa d'un terremoto è caduta in uno stesso giorno la metà del numero delle case d' una città; l' indomani ne è caduto il terzo; il giorno dopo il quarto, e ne restano* 51. — *Quante erano le case dapprima?*

Soluzione.

Sia x il numero domandato; si ha l' equazione

$$x=\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+51;$$

da cui

$$12x=6x+4x+3x+612;$$

e

$$-x=612, \quad \text{o} \quad x=-612.$$

L' enunciato del problema è dunque difettoso; e poichè un numero di case non può esser preso in significato contrario, ne segue che è impossibile correggere l' enunciato, e il problema è insolubile.

Problema 3.°

116. *Pel trasporto di merci sulla strada ferrata si pagano 5 lire per tonnellata e per chilometro, più un diritto fisso di 2 lire per tonnellata; domandasi a qual distanza si porteranno 12 tonnellate con 8 lire.*

Soluzione.

Ponendo il problema in equazione, troviamo che il diritto fisso è 24 e il prezzo $60x$, onde

$$24+60x=8,$$

da cui

$$x=-\frac{4}{15}.$$

Questo valore sostituito nell'equazione la riduce ad una identità:

$$24-60\times\frac{4}{15}=8,$$

ma non risponde al problema che si dimostra assurdo, perchè non sapremmo interpetrare $-\frac{4}{15}$ di chilometro, essendochè portata la merce in avanti o indietro dovrebbe sempre pagare.

117. Le considerazioni precedenti valgono a dimo-

strare che le soluzioni negative indicano sempre una assurdità, la quale talvolta si elimina modificando l'enunciato del problema per modo, che gli si convenga l'incognita affètta dal segno contrario; e tal'altra dà sicuro indizio dell'assoluta impossibilità del quesito da sciogliersi.

Problemi da risolvere.

65. Qual numero bisogna aggiungere a 42 e a 15 perchè il quoziente sia 4?

Resultato: $x=-6.$

(Si modifichi l'enunciato del problema.)

66. Un operaio ricevette il salario per 13 giornate di estate e per guasti fatti pagò 22 lire; nell'inverno ricevette per 17 giornate un salario minore di 2 lire di quello d'estate e più una ricompensa al suo zelo di L. 28. — Qual era il suo salario, sapendo che la prima somma è uguale alla seconda?

Resultato: $x=-4.$

(Si modifichi l'enunciato del problema.)

67. Operai 50 fra uomini e donne hanno fatto in 6 giorni un guadagno di L. 1800: gli uomini hanno lire 7 di salario e le donne 4. — Quanti sono gli uomini e quante le donne?

Resultato: $x=33\frac{1}{3},\quad y=16\frac{2}{3}.$

(Dimostrare l'*impossibilità* del problema.)

68. Trovare un numero, di cui sommando la metà e il terzo si ottiene 5 volte la differenza del suo quarto e del suo dodicesimo più 6.

Resultato: $10x-10x=72.$

(Mostrare l'*assurdità* del problema.)

69. Trovare un numero, di cui sommando la metà e il terzo e togliendo 25, si ottengono i $\frac{5}{6}$ della differenza fra esso numero e 30.

Resultato: $5x-30=5x-30.$

(Dimostrare l'*indeterminazione* del problema.)

Formule generali per la soluzione d'un sistema di due equazioni di primo grado a due incognite.

148. Ogni equazione di primo grado a due incognite può prendere la forma $ax+by=c$, nella quale a, b, c rappresentano numeri interi positivi o negativi.

Infatti, dopo aver fatto sparire i denominatori, si possono trasportare nel primo membro i termini affètti dalle incognite, e nel secondo membro i termini cogniti; indicando allora con a la somma dei coefficienti d'x, con b la somma di quelli d'y, e finalmente con c la somma dei termini cogniti, questa equazione prenderà la forma sopra indicata.

149. Proponiamoci ora di risolvere il sistema delle due equazioni generali

$$ax+by=c,$$
$$a'x+b'y=c'.$$

Preferiremo il metodo d'eliminazione per addizione e sottrazione; eliminando primieramente y, moltiplicheremo la prima equazione per b', coefficiente d'y nella seconda, e la seconda per b, coefficiente d'y

nella prima, ed avremo:

$$ab'x+bb'y=cb',$$
$$ba'x+bb'y=bc';$$

sottraendo la seconda di queste equazioni dalla prima, si ha:

$$(ab'-ba')x=cb'-bc' \ldots\ldots (B)$$

da cui

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (C)$$

Togliendo ora la prima delle equazioni generali date dalla seconda, dopo averle moltiplicate per a' e per a, si ottiene:

$$(ab'-ba')y=ac'-ca' \ldots\ldots\ldots (D)$$

da cui

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (E)$$

Le formule generali (C) (E) così ottenute sodisfano alle equazioni date, com'è facile convincersene, perchè si trovano, dopo la sostituzione, le identità

$$c=c, \quad \text{e} \quad c'=c'.$$

150. Formazione delle formule (C) ed (E). — Esaminando attentamente queste due formule, si scuopre la legge seguente, che servirà a rammentarle:

1.ª *Per formare il denominator comune ai valori delle due incognite, si permutano in tutte le maniere possibili i coefficienti* a *e* b *d'* x *e d'* y *nella prima equazione, il che dà* ab *e* ba; *si affèttano le seconde lettere di un apice* ('), *e si separano le due permutazioni col segno* —: *da ciò resulta il denominatore* $ab'-ba'$.

2.ª *Per formare il numeratore di ciascun valore, si sostituisce nel denominatore trovato al coefficiente dell' in-*

cognita il termine cognito del secondo membro, avvertendo di lasciare al loro posto gli apici. Così, ab'—ba' *si cambia in* cb'—bc' *pel valore d'*x, *e in* ac'—ca' *per quello d'* y.

151. Applichiamo questa teorìa alla soluzione del sistema.

$$3x-2y=-5,$$
$$7x+y=0.$$

Per identificarle alle equazioni generali, poniamo

$$a=3,\ b=-2,\ c=-5,\ a'=7,\ b'=1,\ c'=0;$$

e sostituendo questi valori nelle formule (C) ed (E), troveremo:

$$x=\frac{(-5)\times1-(-2)\times0}{3\times1-(-2)\times7}=\frac{-5\times1}{3\times1+2\times7}=-\frac{5}{17};$$

$$y=\frac{3\times0-(-5)\times7}{3\times1-(-2)\times7}=\frac{5\times7}{3\times1+2\times7}=\frac{35}{17}=2\,\frac{1}{17}.$$

Tali sono i valori d'x e d'y, come potrebbero ottenersi, risolvendo queste equazioni direttamente.

Formule generali per la soluzione d'un sistema di tre equazioni di primo grado a tre incognite.

152. Tre equazioni di primo grado a tre incognite possono sempre ridursi alla forma

$$(1)\ \ldots\ldots ax+by+cz=d,$$
$$(2)\ \ldots\ldots a'x+b'y+c'z=d',$$
$$(3)\ \ldots\ldots a''x+b''y+c''z=d''.$$

Noi risolveremo queste tre equazioni con un metodo più rapido e più elegante di quelli già insegnati.

Moltiplichiamo le due prime equazioni per due quantità indeterminate m ed n; sommiamo queste due equazioni e togliamo la terza; avremo:

$$(4) \ldots\ldots (am+a'n-a'')x+(bm+b'n-b'')y$$
$$+(cm+c'n-c'')z=dm+d'n-d''.$$

I due moltiplicatori m ed n essendo arbitrari, potremo disporne in modo da annullare due coefficienti dell'equazione (4), per esempio i coefficienti d'y e di z. A tal uopo poniamo

$$(5) \ldots\ldots bm+b'n=b'',$$
$$(6) \ldots\ldots cm+c'n=c'',$$

e l'equazione (4) diverrà

$$(am+a'n-a'')x=dm+d'n+d'';$$

da cui

$$(7) \ldots\ldots x=\frac{dm+d'n-d''}{am+a'n-a''}.$$

Dalle equazioni (5) e (6), risolute colle formule generali, si deduce

$$m=\frac{c'b''-b'c''}{bc'-cb'}, \quad n=\frac{bc''-cb''}{bc'-cb'}.$$

Sostituendo questi valori nella formula (7), e moltiplicando il numeratore ed il denominatore per

$$bc'-cb',$$

si ha

$$(8) \ldots x=\frac{d(c'b''-b'c'')+d'(bc''-cb'')-d''(bc'-cb')}{a(c'b''-b'c'')+a'(bc''-cb'')-a''(bc'-cb')}.$$

Per ottenere il valore d'y, si annullano nell'equazione (4) le incognite x e z, ponendo

$$(9) \ldots\ldots am+a'n=a'',$$
$$(10) \ldots\ldots cm+c'n=c'',$$

e l'equazione (4) si riduce a

$$(11) \ldots\ldots (bm+b'n-b'')y = dm+d'n-d'',$$

da cui

$$y = \frac{dm+d'n-d''}{bm+b'n-b''}.$$

Risolvendo le equazioni (9) e (10), si ha

$$m = \frac{c'a''-a'c''}{ac'-ca'}, \quad n = \frac{ac''-ca''}{ac'-ca'}.$$

Sostituendo questi valori nella formula (11), si troverà:

$$y = \frac{d(c'a''-a'c'')+d'(ac''-ca'')-d''(ac'-ca')}{b(c'a''-a'c'')+b'(ac''-ca'')-b''(ac'-ca')}.$$

In modo analogo si avrà:

$$z = \frac{d(b'a''-a'b'')+d'(ab''-ba'')-d''(ab'-ba')}{c(b'a''-a'c'')+c'(ab''-ba'')-c''(ab'-ba')}.$$

Eseguendo ora le operazioni indicate nei valori delle tre incognite x, y, z, e cambiando il segno $-$ in $+$ al numeratore e al denominatore innanzi all' ultima parentesi, i tre valori potranno scriversi così:

$$x = \frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

$$y = \frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

$$z = \frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

153. In queste formule i denominatori sono uguali. Per formare il numeratore del valore d'x, si pongono nel denominatore in luogo dei coefficienti a, a', a'' i secondi membri d, d', d''. I numeratori d'y e di z si ottengono nella stessa maniera. Basta dunque saper trovare il denominatore.

Il denominatore per due incognite si forma scrivendo le due permutazioni

$$ab, -ba$$

delle due lettere a e b, dando alla secondo il segno —. Poi in ciascuna di queste permutazioni, si aggiunge la lettera c, facendole occupare tutti i posti, il terzo, il secondo e il primo, alternando i segni + e —; otterremo così i due gruppi

$$abc-acb+cab,$$
$$-bac+bca-cba.$$

Si scrivono questi due gruppi l'uno di seguito all'altro, si pone un apice sulla seconda lettera di ciascun termine, due apici sulla terza, e si ha il denominatore comune

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'c''-cb'a''.$$

Discussione generale delle formule di risoluzione delle equazioni di primo grado.

154. La discussione delle formule di risoluzione delle equazioni di primo grado ha per oggetto di stabilire i principii atti a formarsi un'idea esatta intorno alle cause per le quali molte volte l'espressione del valore delle incognite si presenta sotto una forma di per sè s'essa insignificante.

Discussione della formula di risoluzione dell'equazione di primo grado ad un'incognita.

155. Per abbracciare tutti i casi che comporta la risoluzione delle equazioni di primo grado ad un' incognita, faremo la discussione dell'equazione generale:

$$(1) \ldots\ldots ax=b,$$

nella quale a e b rappresentano numeri cogniti, positivi o negativi.

Isolando l' incognita dal suo coefficiente, abbiamo

$$x=\frac{b}{a}\cdot$$

156. Teorema 1.° — *Un' equazione di primo grado ad un' incognita ammette un valore per* x, *e non ne ammette che uno.*

Infatti, la soluzione dell'equazione termina con una divisione $\frac{b}{a}$, e questa divisione conduce ad un quoziente e ad *un solo*, positivo o negativo, secondochè il dividendo e il divisore hanno o non hanno lo stesso segno.

157. Teorema 2.° — *Quando un'equazione di primo grado ammette più d'un valore per* x, *ne ammette un numero infinito.*

Riprendiamo l' equazione

$$ax=b\ldots\ldots(1)$$

supponiamo che x possa avere due valori differenti m, n, e che sia $m>n$. Sostituendo questi numeri nell'equazione (1), si ha

$$am=b, \quad an=b;$$

sottraendo membro a membro queste due uguaglianze, si ottiene

$$a(m-n)=0.$$

Ora, affinchè un prodotto sia nullo, è necessario e sufficiente che uno dei fattori sia nullo; ma $m-n$ non può esser nullo, perchè si è supposto $m>n$, dunque $a=0$. Poichè a è nullo, anche am è nullo; dunque $b=0$; cosicchè l'equazione (1) si cambia nell'identità

$$0\times x=0 \ldots\ldots (2),$$

la quale, sotto questa forma è vera qualunque sia x; vi è dunque *indeterminazione*, come dovevasi dimostrare.

Applicazione numerica. — La soluzione dell'equazione

$$\frac{x+10}{2}+\frac{2}{3}(x+20)+\frac{5}{6}(x-34)=2(x-5)$$

dà

$$0=0.$$

158. Teorema 3.° — *L'equazione* ax=b *non può essere risoluta, quando* a *è nullo, e* b *ha un valore differente da* zero.

Infatti, se $a=0$, l'uguaglianza (1) diviene

$$0\times x=b \ldots\ldots (3).$$

Ora, il prodotto di 0 per un numero qualsivoglia dando sempre 0, si avrebbe

$$0=b,$$

il che è assurdo, perchè abbiamo supposto b differente da 0.

Applicazione numerica. — Sia l'equazione

$$\frac{x}{5}+75+\frac{5x}{12}-35=\frac{37x}{60}+49;$$

risolvendola si troverà

$$0=540.$$

Dunque questa equazione è *impossibile.*

Escludendo il caso particolare di $a=0$, potrebbe dirsi senza restrizione che la soluzione dell'equazione di primo grado ad un' incognita è sempre possibile.

159. Teorema 4.° — *Il simbolo* $\frac{0}{0}$ *indica che il valore dell'incognita è indeterminato; ma in certi casi l'indeterminazione non è che apparente.*

Infatti, abbiamo veduto che essendo

$$a=0 \quad \text{e} \quad b=0,$$

l'equazione prende la forma

$$0\times x=0 \ldots\ldots (2).$$

Isolando l' incognita dal suo coefficiente, come se esso non fosse nullo, si avrà

$$x=\frac{0}{0}.$$

E questo suol chiamarsi *simbolo dell' indeterminazione.*

Abbiamo dovuto aggiungere una *restrizione,* perchè può avvenire che x abbia un valore determinato, sebbene si presenti sotto la forma indeterminata.

Esempio. — Sia

$$x=\frac{a^2-b^2}{a-b};$$

qual è il valore di questa frazione, se $a=b$?

1.° $$x=\frac{a^2-a^2}{a-a}=\frac{0}{0},$$

2.° $$x=\frac{(a+b)(a-b)}{a-b}.$$

Sopprimendo il fattor comune $a-b$ avanti di supporre $a=b$, si ottiene $x=a+b$; facendo poi $a=b$, si ha $x=2a$. Dunque $\frac{0}{0}$ può provenire da un fattore comune divenuto nullo in conseguenza di un'ipotesi particolare; quando saremo giunti a mettere questo fattore in evidenza, lo sopprimeremo, poi faremo l'ipotesi particolare, e così avremo il valore richiesto.

160. — Teorema 5.° — *L'espressione* $\frac{m}{0}$ *è il simbolo dell' infinito.*

Abbiamo veduto che essendo $a=0$, si aveva

$$0 \times x = b \ldots\ldots (3),$$

da cui

$$x = \frac{b}{0}.$$

Ora, non vi è numero che moltiplicato per *zero* possa riprodurre b; dunque la divisione è impossibile, da ciò si conclude che l'equazione proposta è *impossibile.*

In secondo luogo, consideriamo la frazione $\frac{A}{B}$; sia

$B=0,1$; $B=0,01$; $B=0,001$; $B=0,0001$, ecc.,

la frazione proposta diverrà

$10A$, $100A$, $1000A$, $10000A$, ecc.,

vale a dire sempre maggiore.

Inoltre: si può dare al denominatore B un valore tanto piccolo, che la frazione superi qualunque numero dato K, per quanto grande esso sia.

Infatti, sodisfare alla disuglianza

$$\frac{A}{B} > K \ldots\ldots (1)$$

è lo stesso che sodisfare all' altra

$$A > BK \ldots\ldots (2),$$

da cui

$$BK < A \ldots\ldots (3),$$

$$B < \frac{A}{K} \ldots\ldots (4).$$

Ora A è un numero dato, ed è diviso per K, supposto grande quanto si voglia; dunque $\frac{A}{K}$ è una quantità piccolissima; ma per quanto piccolo sia questo numero $\frac{A}{K}$, potrà sempre trovarsi un numero minore B.

Se $B=0$, la frazione $\frac{A}{0}$ supera qualunque quantità data: e questo chiamasi *simbolo dell' infinito*, che si suol rappresentare con un 8 rovesciato, così

$$\frac{m}{0} = \infty.$$

Dunque, salvo i casi particolari, qualunque problema che condurrà ad un valore infinito sarà *impossibile.*

161. Da questa discussione può concludersi che, secondochè il valore d'x è *finito, indeterminato* o *infinito*, l'equazione $ax=b$ è *propriamente detta, identica,* e *impossibile.*

Infatti, nelle tre ipotesi abbiamo:

(1) ... $ax=b$ (*propriamente detta*)
(2) ... $0 \times x=0$ (*identica*)
(3) ... $0 \times x=b$ (*impossibile*)

Dalle quali deducesi

$$(1) \ldots x=\frac{b}{a} \qquad (\textit{finito})$$

$$(2) \ldots x=\frac{0}{0} \qquad (\textit{indeterminato})$$

$$(3) \ldots x=\frac{b}{0} \qquad (\textit{infinito}).$$

Discussione delle formule di risoluzione delle equazioni di primo grado a due incognite.

162. Risolvendo le due equazioni generali

$$ax+by=c,$$
$$a'x+b'y=c',$$

abbiamo trovato le formule seguenti:

$$(1) \ldots x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'},$$

$$(2) \ldots y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Se il denominatore comune non è nullo, le due formule dànno evidentemente per x e y valori finiti e determinati che verificano le due equazioni.

E se tali valori compariscono negativi, hanno luogo sul problema corrispondente le stesse considerazioni che abbiamo fatte a suo tempo sopra le soluzioni negative dell'equazioni di primo grado ad una sola incognita (n. 143, ecc.).

Esaminiamo ora i tre casi seguenti, cioè:

1.º ... $ab'-ba'=0$;

2.º ... ($ab'-ba'=0$, e $b'c-bc'=0$);

3.º ... ($a=0$, e $a'=0$).

163. Teorema 1.° — *Le equazioni generali sono contraddittorie, o incompatibili, quando il denominatore è nullo.*

Supponiamo che si abbia $ab'-ba'=0$, ovvero $ab'=a'b$. I due valori (1) (2) si presenteranno sotta la forma $\frac{m}{0}$ o dell'infinito (n. 160). È questo l'indizio d'una *incompatibilità* delle due equazioni proposte.

Infatti, considerando le equazioni

$$(3) \ldots ab'x+bb'y=b'c,$$
$$(4) \ldots a'bx+bb'y=bc',$$

le quali non differiscono dalle proposte che per un fattore costante, si scorge che, nell' ipotesi $ab'=a'b$, esse hanno il primo membro uguale, ed i secondi membri disuguali; lo che non può essere.

164. Teorema 2.° — *Le equazioni generali sono identiche quando il numeratore e il denominatore del valore d'una delle incognite sono nulli.*

Supponiamo che una delle incognite, per esempio x, si presenti sotto la forma $\frac{0}{0}$, il che suppone che abbiasi contemporaneamente

$$ab'-ba'=0 \quad \text{e} \quad cb'-bc'=0.$$

Il valore d'y prenderà, in generale, la stessa forma Perchè da

$$ab'=ba' \quad \text{e} \quad cb'=bc',$$

dividendo membro a membro, si ha

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'},$$

da cui

$$ac'=a'c \quad \text{o} \quad ac'-a'c=0;$$

onde avremmo $\qquad y=\frac{0}{0}\cdot$

In questo caso vi è indeterminazione, perchè le due equazioni proposte rientrano l'una nell'altra, e non si avrebbe perciò che una sola equazione per due incognite.

Infatti, considerando le equazioni (3) (4), si scorge che in virtù delle relazioni

$$ab'=ba' \quad \text{e} \quad cb'=bc',$$

esse divengono

$\left.\begin{array}{l} x+bb'y=b'c \\ x+bb'y=b'c \end{array}\right\}$ ovvero $x+bb'y=x+bb'y$; cioè identiche, e non ne formano realmente che una sola.

165. Teorema 3.° — *Le equazioni generali presentano contemporaneamente indeterminazione ed incompatibilità, quando i coefficienti di una stessa incognita sono nulli.*

Supponiamo di avere

$$a=0, \quad \text{e} \quad a'=0;$$

in tal caso i valori generali diverrebbero

$$x=\frac{b'c-bc'}{0} \quad \text{e} \quad y=\frac{0}{0},$$

vale a dire che l'uno si presenterebbe allora sotto la forma $\frac{m}{0}$ ed il secondo sotto la forma $\frac{0}{0}$. In questo caso vi sarebbe contemporaneamente indeterminazione ed incompatibilità; *indeterminazione*, perchè sostituendo *zero* ai coefficienti a e a' nelle equazioni

$$ax+by=c,$$
$$a'x+b'y=c',$$

si avrebbe:

$$0 \times x + by = c,$$
$$0 \times x + b'y = c',$$

ossia

$$by = c,$$
$$b'y = c';$$

cosicchè le due equazioni proposte diverrebbero indipendenti dall'incognita x.

Vi sarebbe *incompatibilità*, perchè dalle equazioni

$$by = c, \quad b'y = c',$$

si ricaverebbe

$$y = \frac{c}{b}, \quad y = \frac{c'}{b'},$$

cioè due valori differenti per la stessa incognita y, giacchè si suppone

$$b'c - c'b$$

differente da *zero*.

Si giungerebbe a resultati analoghi se si avessero al tempo istesso

$$b = 0, \quad \text{e} \quad b' = 0.$$

166. Per riassumere le diverse particolarità relative ai problemi di primo grado, risolveremo e discuteremo il seguente problema:

Due corrieri partono contemporaneamente dai punti A *e* B, *distanti* d *chilometri: il 1.° fa* a *chilometri in un'ora: il secondo fa* b *chilometri. — A quale distanza dai punti* A *e* B *s'incontreranno, e dopo quante ore?*

d

R' A B R

Soluzione.

Si presentano due casi: o i due corrieri vanno nella stessa direzione, o l'uno va incontro all'altro.

1.° *Caso*. — I due corrieri vanno nella stessa direzione. Sia R il punto d'incontro; rappresentiamo le distanze AR e BR con x e y ed avremo

$$x-y=d.$$

Poichè il primo corriere fa a chilometri in un'ora, impiegherà $\frac{x}{a}$ ore a percorrére la sua strada; il secondo facendo b chilometri ogni ora, impiegherà $\frac{y}{b}$ ore a percorrere la sua strada; in guisachè quando essi s'incontreranno avranno camminato lo stesso numero d'ore. Si hanno dunque le due equazioni

$$(1) \ldots\ldots x-y=d,$$

$$(2) \ldots\ldots \frac{x}{a}=\frac{y}{b}.$$

Dalla seconda si ha

$$(3) \ldots\ldots x=\frac{ay}{b},$$

e sostituendo questo valore nella prima, essa diviene

$$\frac{ay}{b}-y=d;$$

da cui

$$ay-by=bd, \quad \text{o} \quad (a-b)y=bd,$$

e da questa

$$y=\frac{bd}{a-b}$$

(distanza percorsa dal 2.° corriere).

Sostituendo questo valore nell'equazione (1), si ha:

$$x-\frac{bd}{a-b}=d;$$

d' onde

$$(a-b)x-bd=(a-b)d,$$

ovvero

$$(a-b)x=(a-b)d+bd;$$

oppure

$$x=\frac{(a-b)d+bd}{a-b}=\frac{ad-bd+bd}{a-b},$$

o finalmente

$$x=\frac{ad}{a-b}$$

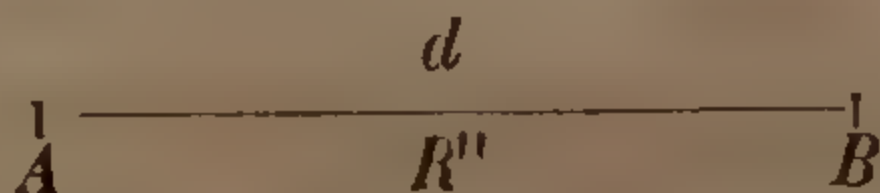
(distanza percorsa dal 1.º corriere).

Ora, per avere il numero d'ore trascorse avanti l'incontro, bisogna dividere gli spazi percorsi pel numero di chilometri che fa ciascun corriere in un'ora, ed avremo perciò

$$\frac{ad}{a-b}:a=\frac{bd}{a-b}:b; \quad \text{cioè} \quad \frac{d}{a-b}=\frac{d}{a-b},$$

com'è naturale.

2.º *Caso.* — Essi vanno in direzione opposta: cioè l'uno incontro all'altro.

$$\underset{A}{|}\overset{d}{\underset{R''}{\rule{8cm}{0.4pt}}}\underset{B}{|}$$

Indichiamo con R'' il punto ove s'incontreranno con con x la distanza AR'', e con y la distanza BR''; allora si avrà

$$AR''+BR''=d,$$

o

$$(4)\ \ldots\ldots x+y=d, \quad \text{e} \quad \frac{x}{a}=\frac{y}{b}$$

per le ore che ciascun corriere impiega nel percorrere la sua strada.

Da quest' ultima equazione si ricava

$$x = \frac{ay}{b};$$

e dalla precedente

$$x = d - y;$$

e confrontando queste due equazioni, si ha l'altra

$$ay = bd - by,$$

da cui

$$ay + by = bd, \quad \text{o} \quad (a+b)y = bd,$$

ovvero

$$y = \frac{bd}{a+b}$$

(distanza percorsa dal 2.º corriere).

Sostituendo questo valore nell'equazione (4) si ha:

$$x + \frac{bd}{a+b} = d,$$

da cui

$$(a+b)x + bd = (a+b)d,$$

ovvero

$$(a+b)x = (a+b)d - bd,$$

oppure

$$(a+b)x = ad + bd - bd,$$

e finalmente

$$x = \frac{ad}{a+b}$$

(distanza percorsa dal 1.º corriere).

Queste formule sono uguali alle precedenti per ciò che concerne i numeratori; non ne differiscono che

pel denominatore, il quale rappresenta la somma delle due velocità anzichè l'eccesso dell'una sull'altra.

Per avere il numero d'ore trascorse avanti l'incontro, basta dividere

$$\frac{ad}{a+b} \text{ per } a, \quad \frac{bd}{a+b} \text{ per } b,$$

ed avremo

$$\frac{d}{a+b}=\frac{d}{a+b},$$

cioè due numeri uguali, come dev' essere.

Discussione.

167. Tre casi si presentano naturalmente nella discussione delle formule

$$x=\frac{ad}{a-b} \quad \text{e} \quad y=\frac{bd}{a-b}$$

che riguardano il nostro quesito risoluto nel primo aspetto, cioè:

$$1.^{\text{o}}\ a>b, \quad 2.^{\text{o}}\ a=b, \quad 3.^{\text{o}}\ a<b;$$

ossia: la velocità del primo corriere è *maggiore* di quella del secondo, o è *uguale* ad essa, o è di essa *minore*.

1.° Se $a>b$ il problema sarà risoluto nel senso del suo enunciato. — Infatti, è facile comprendere che essendo la velocità del primo corriere maggiore di quella del secondo, la distanza che li separa decresce sempre e in fine deve annullarsi.

Se $d=0$, le formule divengono $x=0$, $y=0$; i corrieri s' incontrano al punto di partenza, il che è evidente.

2.º Se $a=b$, le formule dànno

$$x=\frac{ad}{0}, \quad y=\frac{bd}{0}.$$

Per interpetrare questi resultati, osserveremo che

$$\frac{ad}{a-b}, \quad \frac{bd}{a-b}$$

esprimenti le distanze dal punto di partenza al punto d'incontro, aumentano di valore a misura che la distanza $a-b$ delle velocità si avvicina a *zero*; finalmente, quando $a-b=0$, o ciò che è lo stesso, quando $a=b$, vale a dire se le velocità sono uguali, i valori delle frazioni

$$\frac{ad}{a-b}, \quad \frac{bd}{a-b}$$

superano qualunque quantità e divengono per conseguenza infinite; è ciò che abbiam trovato quando il denominatore è uguale a *zero*, come nel nostro caso (n.º 165).

Le espressioni $x=\infty$, $y=\infty$, indicano dunque che i corrieri s'incontrano dopo aver percorso spazi infiniti, o meglio, indicano che essi non possono mai incontrarsi, ed il problema è *impossibile*.

È infatti evidente che i due corrieri andando nella stessa direzione e colla stessa velocità, conservano sempre fra loro la stessa distanza iniziale, e non possono per conseguenza raggiungersi.

Supponiamo che abbiasi contemporaneamente

$$a=b, \quad d=0;$$

le formule

$$x=\frac{ad}{a-b}, \quad y=\frac{bd}{a-b}$$

dànno

$$x=\frac{0}{0}, \quad y=\frac{0}{0}.$$

Ora, il quoziente di *zero* diviso per *zero* è un numero arbitrario; dunque i corrieri incontrandosi dopo aver percorso spazi qualunque, sono sempre insieme, e per conseguenza il problema è *indeterminato*. — E dev'esser così, perchè essi partono dallo stesso punto e vanno nella stessa direzione con uguale velocità.

3.° Se $a<b$, il denominatore $a-b$ essendo negativo, i valori d'x e d'y sono medesimamente negativi, e tale circostanza indica un difetto nell' enunciato del problema. Ed invero, i corrieri non potrebbero mai incontrarsi, perchè il primo andando con velocità minore di quella del secondo, la distanza che li separa cresce ad ogni istante, invece di diminuire. — Per correggere l'enunciato, basta supporre che i corrieri si dirigano verso il punto R', in guisachè il corriere che ha maggiore velocità segua l'altro che ha velocità minore, e l'incontro avrà luogo al punto R'.

Onde ottenere le formule relative a quest'ipotesi, è sufficiente cambiare nelle espressioni

$$x=\frac{ad}{a-b}, \quad y=\frac{bd}{a-b}.$$

i segni alle quantità a, b, x, y che prendono significata contrario, e si avrà

$$x=\frac{ad}{b-a}, \quad y=\frac{bd}{b-a}.$$

Problemi da risolvere.

70. Un levriero insegue una lepre che gli è avanti d passi; il levriero fa m salti nel tempo che la lepre fa n passi, e p salti uguagliano q passi. — Quanti salti farà il levriero prima di raggiungere la lepre, e quanti passi farà la lepre prima d'essere raggiunta?

Resultato:

Il levriero farà $\frac{mpd}{mq-np}$ salti, e la lepre $\frac{npd}{mq-np}$ passi.

71. Le lancette d'un orologio segnano mezzogiorno: a quali ore coincideranno?

Resultato:

A ore $1\frac{1}{11}$, alle $2\frac{2}{11}$, alle $3\frac{3}{11}$ . . . . . alle 12.

72. A quali ore le lancette d'un orologio sono in direzione opposta?

Resultato:

A $\frac{6}{11}$ d'ora, a ore $1\frac{7}{11}$, alle $2\frac{8}{11}$, alle $3\frac{9}{11}$ . . . . . alle $12\frac{6}{11}$.

73. Due mobili percorrono la retta AA', camminando nella stessa direzione colla velocità v e v'; uno è in A, l'altro in A'; la distanza fra A e A' è d. — Dopo quanto tempo s'incontreranno?

Resultato: $x=\frac{d}{v-v'}$.

Equazioni di secondo grado ad una incognita

Equazioni incomplete.

168. L'equazione di *secondo grado* è quella in cui l'incognita ha per maggiore esponente il *due*.

Si distinguono le equazioni *incomplete* e le equazioni *complete;* e la soluzione sì delle une come delle altre si fonda sul seguente principio:

Se due quantità sono uguali, anche le loro radici quadrate saranno uguali.

Le equazioni incomplete non contengono che termini tutti cogniti e termini in cui l'incognita è affètta soltanto dall'esponente 2.

169. L'equazione incompleta, chiamata anche *equazione a due termini*, si riduce sempre alla forma

$$x^2 = q,$$

essendo q il quoziente ottenuto dividendo il termine tutto cognito pel coefficiente dell'incognita.

Ridotta che sia l'equazione a questa forma con opportune semplificazioni, la si risolve ponendo

$$x = \pm\sqrt{q}.$$

Qui però si presentano tre casi:

$$1.^o\ q > 0,\quad 2.^o\ q = 0,\quad 3.^o\ q < 0.$$

Se $q > 0$, la radice è commensurabile o incommensurabile, ma reale; se $q = 0$, sarà $x = 0$; se $q < 0$, cioè a dire se q è negativo, il valore è immaginario, perchè da una quantità negativa non si può estrarre la radice quadrata.

170. Proponiamoci di risolvere la seguente equazione:

$$3x^2+15=5x^2-83.$$

Trasportando il termine $5x^2$, che contiene l'incognita, nel primo membro, e il termine cognito 15 nel secondo, l'equazione data diviene

$$3x^2-5x^2=-83-15,$$

ovvero

$$-2x^2=-98,$$

oppure

$$2x^2=98,$$

e dividendo pel coefficiente 2, si ha

$$x^2=49.$$

Estraendo la radice quadrata da ambi i membri, si trova

$$x=\sqrt{49}=7.$$

E poichè il 49 può nascere da $+7\times+7$ come da -7×-7, resta incerto se il valore d'x sia positivo o negativo; e tanto $+7$ quanto -7 soddisfa all'equazione, perchè rende il primo membro identico al secondo; quindi, per indicare questo doppio valore d'x si prepone al 7 il doppio segno $+$ e $-$, scrivendo

$$x=\pm\sqrt{49}=\pm7.$$

Questi due valori $+7$ e -7 si chiamano le *radici* dell'equazione proposta; e qualunque altra equazione di secondo grado *incompleta* avrà sempre due radici uguali, ma di segno contrario.

171. Da questo esempio si ricava la regola seguente:

Per risolvere un'equazione qualunque di secondo grado

incompleta, basta considerarla come un'equazione di primo grado, riducendola alla forma $x^2=q$, *in cui il termine* x^2 *è positivo ed ha il coefficiente* 1, *e* q *rappresenta in un sol termine, che può essere intero o frazionario, tutti i termini noti: e da questa equazione estrarre la radice quadrata, onde avere il valore dell'incognita.*

Questa regola è evidente, perchè non si altera una equazione eseguendo la stessa operazione sopra i due membri, e perchè qualunque radice di grado pari di una quantità dev' essere affètta dal doppio segno *più o meno.*

172. Prendiamo l'equazione

$$\frac{9x-18}{5x}=\frac{x}{x+2}.$$

Facendo sparire i denominatori col moltiplicare tutta l'equazione per $5x(x+2)$, si ha

$$9x^2+18x-18x-36=5x^2,$$

ovvero

$$9x^2-36=5x^2,$$

oppure

$$9x^2-5x^2=36,$$

e

$$4x^2=36,$$

da cui

$$x=\pm\sqrt{9}=\pm3.$$

Sostituendo ciascuno di questi due valori $+3$ e -3 nell'equazione proposta, si avrà sempre l'identità.

ESERCIZI.

LXIX. Risolvere le seguenti equazioni:

$$\frac{5x^2}{4}=1-x^2.$$

Resultato: $$x=\pm\frac{2}{3}.$$

$$6x^2-12=60-2x^2.$$

Resultato: $$x=\pm3.$$

$$13x^2-275=7x^2+19.$$

Resultato: $$x=\pm7.$$

$$\frac{3x^2}{6}=\frac{6x^2}{8}-4.$$

Resultato: $$x=\pm4.$$

$$6x^2+360=1944-5x^2.$$

Resultato: $$x=\pm12.$$

$$\frac{x^2}{2}-75+\frac{3x^2}{10}=45+\frac{2x^2}{5}.$$

Resultato: $$x=\pm30.$$

$$\frac{x}{5}+\frac{49-x^2}{2x}=\frac{4x}{5}.$$

Resultato: $$x=\sqrt{15}.$$

$$5x^2=\frac{2x^2}{a}+5b.$$

Resultato: $$x=\pm\sqrt{\frac{5ab}{5a-2}}.$$

Problemi sulle equazioni di secondo grado incomplete.

Problema 1.°

Il numero di lire che possiedo è tale, che il suo quarto moltiplicato pel suo quinto uguaglia 45. — Quante lire ho io?

Soluzione.

Sia x il numero delle lire; $\frac{x}{4}$ ne sarà il quarto e $\frac{x}{5}$ il quinto. Avremo dunque l'equazione

$$\frac{x}{4}\times\frac{x}{5}=45;\quad \text{ovvero}\quad \frac{x^2}{20}=45;$$

d'onde

$$x^2=45\times20;\quad \text{e}\quad x=\pm\sqrt{900}=\pm30.$$

Il valore positivo è il solo che convenga al problema; dunque il numero richiesto è 30.

Problema 2.°

Trovare un numero la cui metà aumentata e diminuita successivamente di 7, dia due resultati che, moltiplicati l'un l'altro, producano 32.

Soluzione.

Sia x il numero cercato; avremo l'equazione

$$\left(\frac{x}{2}+7\right)\left(\frac{x}{2}-7\right)=32.$$

Eseguendo i calcoli e riducendo, si troverà

$$x^2 = 324; \quad \text{da cui} \quad x = \pm 18.$$

Il problema ammette ambedue i valori d'x, come può facilmente verificarsi.

Problemi da risolvere.

74. La metà d'un numero moltiplicata pel terzo dello stesso numero, dà 1350 per prodotto; trovare questo numero.

Resultato: Il numero domandato è 90.

75. Il triplo del numero dei soldati che sono in una fortezza uguaglia 67500 diviso pel numero preciso di soldati che trovansi in essa; quanti sono?

Resultato: Il numero dei soldati è 150.

76. Due numeri stanno fra loro come 1 a 3, e la somma dei loro quadrati è 640; quali sono questi due numeri?

Resultato: I due numeri sono 8 e 24.

77. Un mercante vendè due pezze di panno della stessa qualità per L. 1521; si cerchi quanti metri esse contenessero fra tutte e due, sapendo che il prezzo d'un metro era soltanto la nona parte del numero dei metri.

Resultato: Metri 117.

78. Il quinto dell'altezza del monte Bianco in Savoia, moltiplicato pel decimo di essa altezza, dà metri 462722 per prodotto. — Dite qual sia la sua altezza.

Resultato: Metri 4810.

79. Cercare quanti miriametri vi sono da Torino a

Mosca, sapendo che il prodotto del terzo per la metà di quei miriametri supera di 7680 il prodotto del quinto pel sesto dei medesimi.

Resultato: Miriametri 240.

80. L'anno della nascita di Luigi Lagrangia è espresso da un numero, il cui quarto successivamente aumentato e diminuito di 66 dà due risultati, il cui prodotto è 184000. — Trovare l'anno in cui nacque quel celebre matematico.

Resultato: L'anno richiesto è il 1736.

APPLICAZIONE ALLA GEOMETRIA.

81. *L'area d'un rettangolo, in cui la base è gli* $\frac{m}{n}$ *dell'altezza, è di* s *metri quadrati; trovare la base e l'altezza.*

Soluzione.

Rappresentando con b la base e con a l'altezza, si ha

$$s=ab;$$

ma per condizione del problema

$$b=\frac{m}{n}a;$$

dunque

$$s=\frac{m}{n}a \cdot a=\frac{m}{n}a^2;$$

da cui

$$a=\sqrt{\frac{s\times n}{m}},$$

e per conseguenza

$$b=\frac{m}{n}\sqrt{\frac{s\times n}{m}}.$$

82. *Trovare il lato d'un triangolo equilatero, di cui è data l'area.*

Soluzione.

Sia s l'area, l il lato o base ed a l'altezza del triangolo.

Dalla Geometria abbiamo:

$$s=l\times\frac{a}{2},$$

da cui

$$l=\frac{2s}{a}.$$

Ma l'altezza del triangolo rettangolo di cui abbiamo il lato, è data dalla nota formula

$$a=\frac{l}{2}\sqrt{3};$$

sostituendo questo valore ad a nell' equazione precedente avremo:

$$l=\frac{2s}{\frac{l}{2}\sqrt{3}},\ \text{oppure}\ \frac{l^2}{2}\sqrt{3}=2s,\ \text{oppure}\ l^2=\frac{4s}{\sqrt{3}},$$

e da quest' ultima

$$l=\sqrt{\frac{4s}{\sqrt{3}}}.$$

83. Calcolare i cateti d' un triangolo rettangolo, la cui ipotenusa è 20^m, sapendo che essi sono nel rapporto di 3 a 4.

Resultato: $c=16;\quad c'=12.$

84. L'area d' un rettangolo, in cui la base è i $\frac{3}{5}$

dell' altezza, è di 140 m. q.; trovare queste due dimensioni.

Resultato: $h = 15^m, 275....$; $b = 9^m, 165....$

85. Le basi d'un trapezio sono nel rapporto di 3 a 4; l'altezza è la metà della base maggiore, e l'area è di 63 m. q. — Trovare le basi e l'altezza.

Resultato: $b=12^m$; $b'=9^m$; $h=6^m$.

86. Trovare il lato d' un esagono regolare, data la superficie.

Resultato: $$l=\sqrt{\frac{2s}{3\sqrt{3}}}.$$

87. Trovare la base e l'altezza d' un triangolo che ha metri quadrati 58,02 di superficie, e la cui altezza è solamente il terzo della base.

Resultato: $\begin{cases}\text{Altezza: } 6^m, 219\ldots \\ \text{Base: } 18^m, 657\ldots\end{cases}$

88. Un campo di forma rettangolare ha metri quadrati 5184,20 di superficie e la sua altezza non è che i $\frac{4}{5}$ della base. — Determinare queste due dimensioni.

Resultato: Base: $80^m, 5$; Altezza: $64^m, 4$.

89. Un campo di forma triangolare ha ettare 1,0240 di superficie; la base vale 5 volte l'altezza. — Trovare le dimensioni in metri.

Resultato: Altezza: 64^m. Base: 320^m.

90. Si trovino le due dimensioni d' un rettangolo, sapendo che la sua area è di metri quadrati 70,56 e l'altezza è i $\frac{4}{9}$ della base.

Resultato: Base: $12^m, 6$; Altezza: $5^m, 6$.

91. Trovare due rettangoli equivalenti, di cui la somma delle basi sia 110, e tali che se il primo avesse l'altezza del secondo, la sua superficie fosse di metri quadrati 1800, e se il secondo avesse l'altezza del primo, la sua superficie fosse di metri quadrati 1250.

Resultato: { Base del 1.º: 60; del 2.º: 50;
Altezza del 1.º: 25; del 2.º: 30.

Equazioni di secondo grado complete.

173. L'equazione di secondo grado *completa*, o *a tre termini*, contiene termini tutti cogniti, termini in cui l'incognita ha l'esponente 2, e termini in cui l'incognita è alla prima potenza.

174. L'equazione completa si riduce sempre alla forma

$$x^2+px=q,$$

in cui p che rappresenta il coefficiente dell'incognita alla prima potenza e q che significa la quantità cognita del secondo membro, possono essere interi, frazionari, positivi o negativi.

Per risolvere questa equazione generale, osserveremo che x^2+px rappresenta la somma dei due primi termini del quadrato del binomio $x+\frac{p}{2}$; ed infatti, se conformemente alla nota regola si forma il quadrato di questo binomio si ha

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}.$$

Per completare dunque il quadrato, aggiungiamo $\frac{p^2}{4}$ ai due membri dell' equazione

$$x^2+px=q\,;$$

ed avremo

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=q+\frac{p^2}{4},$$

ovvero

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=q+\frac{p^2}{4}.$$

Estraendo ora la radice quadrata dai due membri, si ha:

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}};$$

da cui

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}.$$

Tal' è la formula generale che serve a risolvere le equazioni complete di secondo grado; essa dà due soluzioni, l'una col segno $+$ posto davanti al radicale, l' altra col segno $-$. È utile saperla a memoria, e dà la regola seguente:

175. *Per risolvere un' equazione completa di secondo grado ad una sola incognita, si semplifica sinchè non sia ridotta alla forma* $x^2+px=q$: *poi si uguaglia la prima potenza dell'incognita alla metà del suo coefficiente preso con segno contrario, più o meno la radice quadrata del numero formato dalla quantità tutta cognita, aumentata del quadrato della metà del coefficiente dell' incognita.*

176. Applichiamo questa regola ad alcuni esempi:

1.° Abbiasi l'equazione

$$\frac{360}{x-4}-\frac{360}{x}=3.$$

Moltiplicando tutti i termini pel prodotto dei due denominatori, si ha

$$360x-360(x-4)=3x(x-4),$$

ovvero

$$360x-360x+1440=3x^2-12x,$$

oppure

$$3x^2-12x=1440,$$

e dividendo per 3 ambi i membri,

$$x^2-4x=480.$$

Essendo così ridotta l'equazione alla forma generale, si uguaglierà la prima potenza dell' incognita x alla metà del suo coefficiente 4 preso con segno contrario, più o meno la radice quadrata del numero formato dalla quantità tutta cognita 480, aumentata del quadrato della metà del coefficiente dell' incognita, cioè di $2^2=4$, ed avremo:

$$x=2\pm\sqrt{480+4}=2\pm\sqrt{484}=2\pm22.$$

Dunque le due soluzioni dell' equazione sono

$$2+22=24 \quad \text{e} \quad 2-22=-20.$$

Infatti, sostituendo questi due valori ad x nell'equazione proposta, troveremo l'identità $3=3$.

2.° Risolvere l'equazione

$$x^2+6x=-8.$$

La formula dà

$$x=-3\pm\sqrt{-8+9}=-3\pm\sqrt{1}=-3\pm1.$$

L'equazione ammette dunque le due soluzioni

$$x=-2 \quad \text{e} \quad x=-4.$$

3.° Risolvere l'equazione

$$x^2+4x-12=0.$$

Trasportando -12 nel secondo membro, l'equazione diviene

$$x^2+4x=12,$$

e la formula dà

$$x=-2\pm\sqrt{12+4}=-2\pm\sqrt{16}=-2\pm4.$$

L'equazione ammette dunque le due soluzioni

$$x=2 \quad \text{e} \quad x=-6.$$

177. Si possono avere le radici dell'equazione completa

$$ax^2+bx=c$$

senza ridurre questa equazione alla forma

$$x^2+px=q,$$

cioè senza fare $\frac{b}{a}=p$, e $\frac{c}{a}=q$ (n.° 174).

Infatti, nella formula

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$$

facciamo

$$p=\frac{b}{a} \quad \text{e} \quad q=\frac{c}{a};$$

avremo

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}},$$

ovvero

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{4a^2c+ab^2}{4a^3}};$$

e sopprimendo sotto al radicale il fattor comune a,

$$x=-\frac{b}{a}\pm\sqrt{\frac{4ac+b^2}{4a^2}};$$

ma la radice quadrata di $4a^2$ è $2a$; dunque

$$x=-\frac{b}{a}\pm\frac{\sqrt{4ac+b^2}}{2a},$$

ovvero

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac+b^2}}{2a}\ \ldots\ldots(1).$$

Questa formula è spesso usata nella pratica, perchè conduce a calcoli più semplici della prima (n.° 174).

178. Quando il coefficiente b d' x è *pari*, si può porre $b=2b'$ nella formula, la quale allora diviene

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4ac+4b'^2}}{2a}=\frac{-b'\pm\sqrt{ac+b'^2}}{a}.$$

Sotto questa forma l'applicazione della formula esige calcoli aritmetici più semplici ancora.

Esempio. — L' equazione

$$3x^2-28x=-49,$$

dà

$$x=\frac{14\pm\sqrt{14^2-3\times49}}{3}=\frac{14\pm7}{3};$$

cioè

$$x=7,\quad \text{e}\quad x=\frac{7}{3}.$$

Quando $a=1$, la formula (1) diviene

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{4c+b^2}}{2};$$

forma che può prendere la formula generale del n.° 174.

Relazione fra le radici e i coefficienti dell'equazione di secondo grado.

179. Teorema 1.° — *L'equazione di secondo grado, sia incompleta o completa, ammette due radici, e non può averne di più.*

Infatti, dalla combinazione dei segni, nascono quattro resultati:

Si ha

$$x^2 = \pm q,$$

dunque:

$$+x = +\sqrt{q};\quad +x = -\sqrt{q};$$
$$-x = +\sqrt{q};\quad -x = -\sqrt{q}.$$

Ora, la prima e l'ultima combinazione sono le stesse; la seconda e la terza sono simili; per convincersene basta riflettere che si può cambiar il segno in ogni equazione; dunque l'equazione di secondo grado non può aver che due radici.

180. Teorema 2.° — *La somma delle radici dell'equazione completa di secondo grado è uguale al coefficiente del secondo termine preso con segno contrario.*

Infatti, dall' equazione

$$x^2 + px = q$$

si ricavano questi due valori:

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}},\ \text{e}\ x = -\frac{p}{2} - \sqrt{q + \frac{p^2}{4}}.$$

Rappresentando x con a e con b, si ha per la somma delle radici:

$$a + b = -\frac{p}{2} + \sqrt{q + \frac{p^2}{4}} - \frac{p}{2} - \sqrt{q + \frac{p^2}{4}};$$

ora i due termini

$$+\sqrt{q+\frac{p^2}{4}} \quad \text{e} \quad -\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$$

si distruggono, e resta:

$$a+b=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}, \quad \text{ovvero} \quad a+b=-p;$$

dunque: la somma delle radici uguaglia il coefficiente dell'incognita alla prima potenza preso con segno contrario, il che dovevasi dimostrare.

181. Teorema 3.° — *Il prodotto delle radici dell'equazione completa di secondo grado è uguale al termine tutto cognito preso col suo segno nel primo membro della forma.*

Infatti, prendiamo le equazioni

$$a=-\frac{p}{2}+\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}; \quad b=-\frac{p}{2}-\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}.$$

Moltiplicandole membro a membro, il prodotto sarà:

$$ab=+\frac{p^2}{4}-\frac{p}{2}\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}+\frac{p}{2}\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$$

$$-\left(\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}\right)\times\left(\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}\right),$$

ovvero

$$ab=+\frac{p^2}{4}-\frac{p}{2}\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$$

$$+\frac{p}{2}\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}-\left(\frac{p^2}{4}+q\right);$$

da cui

$$ab=+\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}+q\right),$$

perchè gli altri due termini si distruggono; si ha dunque:

$$ab = +\frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} + q\right),$$

ovvero

$$ab = +\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} - q;$$

da cui

$$ab = -q.$$

Dunque il prodotto delle radici uguaglia la quantità tutta cognita presa col suo segno nel primo membro della forma; perchè se q passasse nel primo membro, si avrebbe:

$$x^2 + px - q = 0.$$

Applicazioni.

182. Problema 1.° — *Formare un' equazione completa di secondo grado, le cui radici sieno* a *e* b.

Soluzione.

Supponendo il coefficiente d'x^2 uguale all' unità,

$$-(a+b) \quad \text{e} \quad -ab$$

sono rispettivamente il coefficiente del secondo termine ed il membro tutto cognito; l' equazione richiesta è per conseguenza

$$x^2 - (a+b)x = -ab.$$

Infatti, risolvendo questa equazione, si troverà

$$x = a \quad \text{e} \quad x = b.$$

Si può anche verificare questo resultato, sostituendo

alternativamente a e b ad x in questa equazione, e si ha:

$$a^2-(a+b)a=-ab; \quad b^2-(a+b)b=-ab,$$

equazioni che si riducono l'una e l'altra a

$$-ab=-ab.$$

Così, l'equazione le cui radici sono $\frac{2}{3}$ e -5 è

$$x^2-\left(\frac{2}{3}-5\right)x=-\frac{2}{3}\times-5,$$

ovvero

$$x^2+\frac{13}{3}x=\frac{10}{3}.$$

183. Problema 2.º — *Essendo data un'equazione di secondo grado, formarne un'altra le cui radici sieno uguali a quelle della prima, prese con segni contrari.*

Soluzione.

Sia $x^2+px=q$ l'equazione data, e a, b sieno le due radici, in guisa che si abbia:

$$a+b=-p \quad \text{e} \quad ab=-q.$$

Le radici dell'equazione domandata essendo $-a$ e $-b$, il coefficiente d'x sarà espresso da

$$-(-a-b)=a+b=-p,$$

e il membro cognito da

$$-(-a)(-b)=-ab=q.$$

L'equazione cercata è dunque

$$x^2-px=q.$$

Segue da ciò che, *per cambiare i segni delle radici*

di un' equazione completa di secondo grado, basta cambiare il segno al coefficiente del secondo termine.

184. Problema 3.° — *Data la somma e il prodotto di due numeri, trovare questi numeri.*

Sieno S la somma e P il prodotto dei due numeri; si potranno prendere per questi due numeri le radici dell' equazione

$$x^2-Sx+P=0, \dots\dots (1)$$

perchè (n.° 180) la somma di queste radici è S, e (n.° 182) il prodotto è P. Dando all'equazione (1) la forma

$$P=Sx-x^2, \quad \text{o} \quad P=x(S-x)$$

è facile vedere che risolvere questa equazione è lo stesso che trovare due numeri x e $S-x$, il cui prodotto sia P, e la cui somma sia $x+S-x$, ossia S.

Esempio: — Se S è uguale a 6 e P è uguale a —27, si ha l'equazione

$$x^2-6x-27=0,$$

oppure

$$x^2-6x=27;$$

da cui

$$x=3, \quad \text{e} \quad x=-9.$$

ESERCIZI.

LXX. Risolvere le seguenti equazioni e verificare le radici per mezzo dei teoremi dei n.i 180 e 181:

$$2x^2+12x=54.$$

Resultato: $x=3, \quad x=-9.$

$$x^2-7x+3\frac{1}{4}=0.$$

Resultato: $x=6\frac{1}{2}, \quad x=\frac{1}{2}.$

$$x^2-5\frac{3}{4}x=18.$$

Resultato: $x=-8, \quad x=+2\frac{1}{4}.$

$$9\frac{1}{3}x^2-90\frac{1}{3}x+195=0.$$

Resultato: $x=6\frac{3}{7}, \quad x=3\frac{1}{4}.$

$$\frac{18x^2}{5}+\frac{18078x}{65}+4728=0.$$

Resultato: $x=-25\frac{10}{39}, \quad x=-52.$

$$\frac{48}{x+3}=\frac{165}{x+10}-5.$$

Resultato: $x=5\frac{2}{5}, \quad x=5.$

$$\frac{2x+3}{10-x}=\frac{2x}{25-3x}-6\frac{1}{2}.$$

Resultato: $x=13\frac{22}{31}, \quad x=8.$

$$80x+\frac{3x^2}{4}+\frac{21x-27782}{12}=1859\frac{1}{3}-3x^2.$$

Resultato: $x=-46, \quad x=24\frac{1}{5}.$

$$\frac{5}{6}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=8-\frac{2}{3}x-x^2+\frac{273}{12}.$$

Resultato: $x=4$, $x=-\frac{45}{11}$.

$$6x^2-37x=-57.$$

Resultato: $x=\frac{19}{6}$, $x=3$.

$$4a^2-2x^2+2ax=18ab-18b^2.$$

Resultato: $x=2a-3b$, $x=-a+3b$.

$$\frac{x}{x+60}=\frac{7}{3x-5}.$$

Resultato: $x=14$, $x=-10$.

$$adx-acx^2=bcx-bd.$$

Resultato:

$$x=\frac{d}{c},\quad x=-\frac{b}{a}.$$

LXXI. Scrivere l'equazione completa di secondo grado che ha per radici

$$3,\quad -\frac{4}{5}.$$

Resultato: $5x^2-11x-12=0$.

LXXII. Formare l'equazione di secondo grado che ha per radici

$$\frac{1}{2}+3\sqrt{-1},\quad \frac{1}{2}-3\sqrt{-1}.$$

Resultato: $4x^2-4x+37=0$.

LXXIII. Comporre l'equazione di secondo grado, le cui radici sono

$$(a+b)^2 \quad (a-b)^2.$$

Resultato: $x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0.$

Problemi sulle equazioni complete di secondo grado ad una incognita.

Problema 1.°

Trovare un numero il cui quadrato aumentato di 10, sia uguale a 7 volte lo stesso numero.

Soluzione.

Sia x il numero incognito; avremo:

$$x^2+10=7x, \quad \text{ovvero} \quad x^2-7x=-10;$$

e da quest'ultima equazione:

$$x=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}-10}=\frac{7}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{7\pm3}{2};$$

dunque

$$x=\frac{7+3}{2}=5, \quad \text{e} \quad x=\frac{7-3}{2}=2.$$

I numeri 5 e 2 sodisfano l'uno e l'altro alla condizione voluta, perchè

$$5^2+10=35=7\times5; \quad \text{e} \quad 2^2+10=14=7\times2.$$

Problema 2.°

Un capitano di cavalleria compra un cavallo che poi vende per 21 napoleoni d'oro; in questa vendita il capi-

tano perde tanto per 100 quanto gli era costato il cavallo. Si domanda quanto l'aveva pagato.

Soluzione.

Indichiamo con x la somma cercata in napoleoni d'oro; poichè sopra 100 napoleoni il capitano perde x, sopra 1 napoleone perde $\frac{x}{100}$; e per conseguenza sopra x napoleoni perde $\frac{x}{100}\times x$, ovvero $\frac{x^2}{100}$; ora, questa perdita è pure espressa da $x-21$; dunque $\frac{x^2}{100}=x-21$, ovvero $x^2=100x-2100$, cioè

$$x^2-100x=-2100;$$

equazione di secondo grado completa, da cui ricavasi

$$x=50\pm\sqrt{2500-2100}=50\pm\sqrt{400}=50\pm20;$$

ovvero

$$x=50+20=70, \quad \text{e} \quad x=50-20=30.$$

Così il problema ammette due soluzioni che ora verificheremo sull'enunciato stesso.

1.° Se il capitano ha pagato il cavallo 70 napoleoni, e se vendendolo ha perduto 70 per 100, la perdita è $\frac{70}{100}\times70=49$; infatti $70-21=49$.

2.° Se il capitano ha pagato il cavallo 30 napoleoni, la perdita è di $\frac{30}{100}\times30=9$; infatti, $30-21=9$.

Problema 3.°

Dividere una retta in media ed estrema ragione, cioè dividerla in due parti disuguali in modo, che la maggiore sia media proporzionale fra l'intera linea e l'altra parte.

Soluzione.

Sia a la linea data e x la parte maggiore; dovrà aversi:

$$a : x :: x : a-x,$$

ossia

$$x^2=a(a-x),$$

$$x^2+ax-a^2=0,$$

e quindi

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}+a^2}=-\frac{a}{2}\pm\frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

Una delle radici è positiva e dà il valore d'x, l'altra è negativa e dev' essere rigettata.

Si può nondimeno interpetrare la radice negativa. Infatti, rappresentandola con $-k$ avremo

$$(-k)^2=a\Big(a-(-k)\Big),$$

ossia

$$k^2=a(a+k);$$

dunque k è media proporzionale fra a e $a+k$, e corrisponde al seguente problema:

Trovare sul prolungamento di AB

X A B

un punto tale X, *che sia distante da* A *di una lunghezza* AX=k *media proporzionale fra* AB=a, *e* XB=a+k.

Dunque, come nella maggior parte dei problemi di primo grado, la soluzione negativa dev' esser portata sulla retta AB, in senso opposto alla soluzione positiva.

Problema 4.°

Qual è il numero che, aumentato della sua radice quadrata, uguaglia 210?

Soluzione.

Sia x il numero cercato; avremo l'equazione

$$x+\sqrt{x}=210.$$

Per fare sparire il radicale, si isola in un membro, poi s'innalzano i due membri al quadrato, e si ha successivamente

$$\sqrt{x}=210-x,$$

$$x^2-421x+44100=0;$$

da cui

$$x=196, \quad x=225.$$

Ora

$$\sqrt{196}=14, \quad \text{e} \quad \sqrt{225}=15;$$

quindi

$$196+14=210 \quad \text{e} \quad 225+15=240.$$

Dunque il solo numero 196 sodisfa alla condizione del problema.

Ma osserviamo che $225-15=210$; dunque la seconda soluzione $x=225$ risponde al problema: *Qual è il numero che, diminuito della sua radice quadrata, uguaglia* 210?

Problema 5.°

Qual è il triangolo rettangolo i cui lati sono tre numeri interi consecutivi?

Soluzione.

Sia x il lato minore; il medio sarà $x+1$, e il maggiore $x+2$. Ma per un teorema di Geometria sappiamo che in un triangolo rettangolo il quadrato dal lato maggiore è equivalente alla somma dei quadrati degli altri due lati; abbiamo dunque l'equazione

$$(x+2)^2=(x+1)^2+x^2,$$

da cui ricavasi

$$x^2-2x-3=0$$

e

$$x=3, \quad x=-1.$$

Il lato minore essendo 3, gli altri due sono 4 e 5.

Se volessimo applicare qui la regola nota per interpetrare la soluzione negativa $x=-1$, basterebbe cambiare il segno d'x, e si avrebbe

$$(2-x)^2=(1-x)^2+x^2.$$

Sappiamo già che questa equazione ammette la radice 1; ma i numeri 1, 0, 1 non rendono possibile il triangolo, perchè l'uno dei lati sarebbe nullo; d'altronde 1, 0, 1 non sono tre numeri consecutivi.

Problema 6.°

Un artigiano vuol costruire un tino che contenga 344lit., 22; l'altezza dev' essere di 7 decimetri e il raggio del fondo 3 decimetri. — Trovare il raggio dell'apertura di questo tino.

Soluzione.

Sia x il raggio richiesto. — Poichè il tino ha la forma di un tronco di cono, il suo volume in litri

sarà :

$$\frac{\pi \times 7}{3}(x^2+3x+9),$$

perchè sappiamo che il volume d' un tronco di cono a basi parallele si ottiene moltiplicando per il terzo dell' altezza la somma della base maggiore, della minore e di una media proporzionale fra queste basi.

E poichè la capacità del tino dev'essere di $344^{lit}, 22$, si ha l' equazione di secondo grado

$$344,22=\frac{\pi \times 7}{3}(x^2+3x+9),$$

ovvero

$$x^2+3x+9=\frac{344,22\times 3}{7\pi}=46,96,$$

oppure

$$x^2+3x-37,96=0.$$

Risolvendo questa equazione, si trova:

$$x=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{9+4\times 37,96},$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{160,84}}{2}=\frac{-3\pm 12,68}{2}.$$

La radice negativa che non sodisfa al problema deve essere rigettata; e pel raggio dell'apertura troveremo

$$x=\frac{9,68}{2}=4 \text{ decimet., } 84.$$

Problemi da risolvere.

92. Trovare un numero tale, che se dal suo decuplo si toglie il triplo del suo quadrato, il resto sia uguale a 8.

Resultato: $x=2$, o $x=\frac{4}{3}$.

93. Il prodotto d'un numero per 9 supera di 14 il suo quadrato. — Trovare questo numero.

Resultato: $x=7$, e $x=2$.

94. Qual è il numero il cui quadrato, moltiplicato per 13, supera di 38 il prodotto di questo numero per 7?

Resultato: $x=2$, e $x=-\frac{19}{13}$;

il numero 2 risponde direttamente alla domanda; il numero negativo $-\frac{19}{13}$ risponde al problema seguente: *Qual è il numero il cui quadrato moltiplicato per* 13 *è superato da* 38 *del prodotto di questo numero per* 7?

95. Decomporre il numero 10 in due parti tali, che la somma dei loro cubi sia 370.

Resultato: Le due parti sono 7 e 3.

96. Si dispone un'armata di 20161 uomini in 3 battaglioni quadrati a centri pieni; il lato del primo quadrato contiene 19 uomini più di quello del secondo, e quello del secondo 21 uomini più di quello del terzo. — Si domanda quanti uomini sono sul lato di ciascun battaglione.

Resultato: 100 sul lato del 1.°; 81 sul lato del 2.°; 60 su quello del 3.°

97. Si sono pagati, dopo un certo tempo, due operai impiegati a differente salario; il primo ha ricevuto L. 96 e il secondo, avendo lavorato 6 giorni di meno, non ha ricevuto che L. 54. — Se quest'ultimo avesse lavorato tutti i giorni, ed il primo 6 giorni di meno, ambidue avrebbero ricevuto la stessa somma. — Quanti giorni ha lavorato ciascuno, e qual'è il prezzo della loro giornata?

Resultato:

Il 1.º ha lovorato 24 giorni a L. 4 per giorno, e il 2.º ha lavorato 18 giorni a L. 3 per giorno.

98. Più persone debbono pagare Lire 240 per una compra fatta in comune, ma tre di esse sono insolvibili, e le altre supplendo alla loro mancanza, sono obbligate di pagare ciascuna 18 Lire di più di ciò che avrebbero pagato. — Quante erano le persone che contrassero quel debito?

Resultato: Le persone erano 8.

APPLICAZIONE ALLA GEOMETRIA.

99. *L'area d'un trapezio è di* 8 m. q.; *la differenza fra le basi parallele è di* 2^m; *la somma delle basi coll'altezza è di* 10^m; *trovare le due basi e l'altezza del trapezio.*

Soluzione.

Chiamando a e b le due basi parallele ed h l'altezza del trapezio, si hanno le tre equazioni

$$a-b=2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a+b+h=10 \ldots\ldots (2)$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)h=8 \ldots\ldots (3)$$

Dalla (2) si ha

$$a+b=10-h \ldots\ldots (4)$$

dalla (3)

$$a+b=\frac{16}{h}.$$

dunque

$$10-h=\frac{16}{h}.$$

Risolvendo quest'ultima equazione, trovasi

$$h=5\pm3;$$

dunque

$$h=8, \quad \text{o} \quad h=2.$$

Sostituendo questi valori nella (4), si ha:

$$a+b=10-8, \quad \text{ovvero} \quad a+b=10-2,$$

cioè

$$a+b=2, \quad \text{ovvero} \quad a+b=8.$$

Così si hanno due soluzioni al problema.

Prima soluzione, per $h=8$ e $a+b=2$.

Dall'equazione (1) abbiamo

$$a-b=2; \text{ dunque } b=0;$$

ma se $b=0$ la figura non è un trapezio, ma un triangolo.

Seconda soluzione, per $h=2$ e $a+b=8$.

Sostituendo il valore di h nella (2), abbiamo:

$$a+b+2=10;$$

dunque

$$a=10-2-b, \quad \text{ovvero} \quad a=8-b;$$

sostituendo questo valore nella (1), si ha:

$$8-b-b=2, \quad \text{ovvero} \quad b=3.$$

Dunque, se $h=2$, si avrà

$$a=8-3=5, \quad \text{e} \quad b=3.$$

Infatti, sostituendo questi valori nella (3), abbiamo:

$$\left(\frac{5+3}{2}\right)\times 2=8; \quad \text{ovvero} \quad 8=8.$$

100. L'area d'un rettangolo è 40 m. q.; la somma della base coll'altezza è di 13 metri. — Trovare le dimensioni.

Resultato: $l=8$; $l'=5$.

101. La superficie d'un rettangolo è 91 m. q., 25; e il suo perimetro è 39^m, 6; trovare i lati del rettangolo.

Resultato: $l=12^m$, 5; $l'=7^m$, 3.

102. L'area d'un rettangono è di 391 metri quadrati; se si aumentasse ciascun lato d'un metro, l'area sarebbe di 432 metri quadrati. — Trovare i lati di questo rettangolo.

Resultato: I lati sono 23 e 17 metri.

103. Un triangolo ha metri quadrati 250 di superficie, e la somma della base coll'altezza è uguale a metri 45; cercare queste due dimensioni.

Resultato: Base$=25^m$; altezza$=20^m$.

104. Trovare un rettangolo di cui la differenza dei lati sia a e la cui superficie sia b.

Resultato: I lati sono

$$\frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \quad \text{e} \quad \frac{+a+\sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

Discussione della formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado complete.

183. La discussione della formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado complete ha per oggetto di mettere in grado di riconoscere *a priori* se le radici saranno reali o immaginarie, razionali od irrazionali, uguali o disuguali, del medesimo o di diverso segno.

Nella formula

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{q+\frac{p^2}{4}}$$

si presentano tre casi:

1.° $\frac{p^2}{4}+q>0$;

2.° $\frac{p^2}{4}+q=0$;

3.° $\frac{p^2}{4}+q<0$.

1.° *Caso.* $\left(\frac{p^2}{4}+q>0\right)$. Questo primo caso comprende tre varietà:

1.ª $q>0$;
2.ª $q=0$;
3.ª $q<0$.

1.ª *Varietà.* Se $q>0$, cioè *positivo*, si ha

$$\frac{p^2}{4}<\left(\frac{p^2}{4}+q\right),$$

e per conseguenza

$$\sqrt{\frac{p^2}{4}} \quad \text{o} \quad \frac{p}{2}<\sqrt{\frac{p^2}{4}+q};$$

ciascuna radice prende il segno del radicale che le corrisponde.

Dunque: *ogni equazione di secondo grado, il cui termine tutto cognito è positivo, ha due radici reali e di segno contrario*, perchè ciascuna prende il segno che precede il radicale.

2.ª *Varietà*. Se $q=0$, le radici dell'equazione divengono

$$x=-\frac{p}{2}+\frac{p}{2}=0;$$

e l'altra

$$x=-\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=-p.$$

Dunque: *le radici d'un'equazione di secondo grado, che ha il termine cognito uguale a* zero, *sono uguali, l'una a* zero, *l'altra al coefficiente del secondo termine, preso con segno contrario.*

3.ª *Varietà*. Se $q<0$, cioè, *negativo*, e *numericamente minore* di $\frac{p^2}{4}$, si ha:

$$\frac{p^2}{4}>\left(\frac{p^2}{4}+q\right),$$

appunto perchè q è negativo; per conseguenza abbiamo

$$\frac{p}{2}>\sqrt{\frac{p^2}{4}+q};$$

le due radici dell'equazione prendono il segno del primo termine $-\frac{p}{2}$, perchè esso è maggiore.

Dunque: *quando il termine tutto cognito è negativo e, astrazione fatta dal segno, minore del quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, le due radici sono reali e di segno uguale; positive, se nella forma questo coefficiente è negativo; negative se esso è positivo;* perchè cambia segno passando nel secondo membro ove trovansi le radici.

Ma se q è *negativo* e *numericamente maggiore* di $\frac{p^2}{4}$, si ha

$$q=\frac{p^2}{4}+k^2,$$

rappresentando con k^2 il numero positivo che devesi aggiungere a $\frac{p^2}{4}$ per uguagliare q; si ha dunque:

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=-k^2=\frac{p^2}{4}-q,$$

ovvero

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}+k^2=0,$$

oppure

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k^2=0.$$

Ora, è impossibile che la somma di due quantità positive uguagli *zero*: dunque il valore d'x è immaginario. (Questo si applica solamente al terzo caso.)

Dunque: *quando il numero tutto cognito è negativo*

e maggiore del quadrato della metà del coefficiente del secondo termine :

1.° Le radici sono immaginarie ;

2.° L'equazione è impossibile, e tutti i termini trasportati nel primo membro equivalgono alla somma di due quadrati.

2.° *Caso.* $\left(\frac{p^2}{4}+q=0, \text{ o } q=-\frac{p^2}{4}\right).$

Si ha

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{0}=-\frac{p}{2},$$

e

$$x-\frac{p}{2}-\sqrt{0}=-\frac{p}{2}.$$

Per conseguenza, *se il numero cognito è negativo e numericamente uguale al quadrato della metà del coefficiente del secondo termine, le due radici sono uguali fra loro e uguali a questa stessa metà presa con segno contrario.*

L'equazione

$$x^2+px=-q$$

diviene allora

$$x^2+px=-\frac{p^2}{4},$$

ovvero

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=0,$$

oppure

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0.$$

Dunque: *quando esiste uguaglianza fra le radici, tutti i termini dell' equazione, trasportati nel primo membro, formano un quadrato.*

3.° *Caso.* $\left(\frac{p^2}{4}+q<0\right)$.

Nella 3.ª Varietà del 1.° caso bisognava che q fosse negativo, ma numericamente minore di $\frac{p^2}{4}$; ma qui il caso esige che q sia negativo e di un valore *assoluto* maggiore di $\frac{p^2}{4}$.

Il radicale, e per conseguenza le radici, sono immaginarie, perchè un quadrato è sempre positivo.

Rappresentiamo con k il termine $-\frac{p}{2}$, e con h la radice dell' espressione $\frac{p^2}{4}+q$ presa positivamente, in guisa che sia $-h^2=\frac{p^2}{4}+q$; vale a dire che il quadrato della radice h presa negativamente sia uguale al quadrato $\frac{p^2}{4}+q$ preso positivamente; la formula che dà le radici diviene

$$x=k\pm\sqrt{-h^2}, \quad \text{o} \quad x=k\pm h\sqrt{-1}.$$

Onde riconoscere la forma d'un'equazione di secondo grado le cui radici sono immaginarie, facciamo passare il termine k nel primo membro e innalziamo al quadrato; avremo

$$(x-k)^2=-h^2, \quad \text{o} \quad (x-k)^2+h^2=0;$$

equazione la cui impossibilità è manifesta, perchè si-

gnifica che la somma di due quantità positive è uguale a *zero*.

Dunque: *quando il numero tutto cognito è negativo e maggiore della metà del coefficiente del secondo termine:*

1.° *Le radici sono immaginarie;*

2.° *Esse sono della forma* $x = k \pm h\sqrt{-1}$;

3.° *L'equazione è impossibile, e tutti i termini trasportati nel primo membro equivalgono alla somma di due quadrati.*

186. Riassumendo:

1.° Quando la quantità posta sotto al radicale è *positiva*, la sua radice quadrata è reale, e reali sono le due radici dell'equazione.

2.° Quando la quantità posta sotto al radicale è *nulla*, le due radici sono uguali ciascuna a $-\frac{p}{2}$.

3.° Quando la quantità sotto al radicale è *negativa*, la sua radice quadrata è immaginaria, e per conseguenza immaginarie sono le radici dell'equazione.

187. La discussione precedente, come abbiam detto, fa conoscere la natura delle radici d'una equazione di secondo grado, alla sola ispezione de' suoi coefficienti, ossia delle quantità rappresentate da p e da q.

ESEMPI:

1.° Sia $x^2 - 6x = 7$. — Il secondo membro 7 essendo positivo, questa equazione ha due radici reali e di segno contrario; la maggiore è positiva, perchè la loro somma è $7 - 1 = 6$. (1.ª Varietà.)

Esempio 2.° Sia $x^2-6x=0$. Questa equazione ha due radici reali, una uguale a *zero*, e l'altra a 6. (2.ª Varietà.)

Esempio 3.° Sia $x^2-6x=-7$. 1.° Le radici sono reali, perchè 7 è $<\left(\frac{6}{2}\right)^2$ o 9; 2.° Esse hanno segno uguale, attesochè il loro prodotto è 7, positivo; 3.° Esse sono positive, perchè la loro somma è 6. (3.ª Varietà.)

Esempio 4.° Sia $x^2+6x=-9$. Il membro tutto cognito -9 essendo negativo e numericamente uguale a $\left(-\frac{6}{2}\right)^2$, le due radici sono uguali fra loro e a $-\frac{6}{2}$, cioè -3; l'equazione data può porsi sotto la forma (2.° Caso):

$$x^2+6x+9=0,$$

e per conseguenza anche sotto la forma

$$(x+3)^2=0.$$

Esempio 5.° Sia $x^2-2x=-5$. 1.° Le radici sono immaginarie, perchè il secondo membro -5 è negativo ed ha un valore assoluto maggiore di $\left(-\frac{2}{2}\right)^2$ o 1; 2.° Esse sono della forma

$$k\pm h\sqrt{-1},$$

perchè dall' equazione ricavasi

$$x=1\pm\sqrt{-4},$$

ovvero

$$x=1\pm2\sqrt{-1};$$

3.º L'equazione è impossibile, il che resulta dalla formula

$$x=1\pm2\sqrt{-1},$$

dalla quale deducesi successivamente (3.º Caso):

$$x-1=\pm2\sqrt{-1},\quad (x-1)^2=-4,\quad (x-1)^2+4=0.$$

ESERCIZI.

LXXIV. Si domanda se le tre equazioni seguenti

$$x^2-2x=35;\quad x^2+14x=-47;\quad x^2-8x=-25$$

abbiano le loro radici reali od immaginarie.

LXXV. Si domanda se le quattro equazioni seguenti

$$x^2-14x=-48;\quad x^2-6x=72;$$

$$x^2-10x=-22;\quad x^2+\frac{2}{3}x=\frac{4}{3}$$

abbiano le radici commensurabili od incommensurabili.

LXXVI. Provare che le due equazioni

$$x^2+12x=-36;\quad x^2-16x=-64$$

hanno necessariamente le radici uguali.

Problemi di massimi e minimi solubili per le equazioni di secondo grado.

188. Si chiama *massimo* d'una quantità il maggior valore che essa possa prendere, secondo certe condizioni determinate. Il *minimo* è il minor valore opposto.

189. Se si cerchi, per esempio, di dividere un numero $2m$ in due parti il cui prodotto sia il maggiore possibile, esso prodotto sarà un *massimo*, vale a dire esprimerà il maggior valore che può assumere quando, dopo aver decomposto il numero $2m$ in due parti, si faccia il prodotto di queste due parti.

Il problema si riduce a determinare queste parti del numero $2m$.

Indicando con x una delle parti, l'altra sarà:

$$2m-x.$$

Se rappresentiamo con p il maggior prodotto possibile di quelle due parti, avremo l'equazione:

$$x(2m-x)=p, \quad \text{ovvero} \quad 2mx-x^2=p,$$

oppure

$$x^2=2mx-p, \quad \text{da cui} \quad x=m\pm\sqrt{m^2-p}.$$

Da questo resultato si conclude che x non può essere reale se non quando p sarà minore di m^2, o almeno ad esso uguale; d'onde segue che il maggior valore che possa darsi a p è m^2, vale a dire che il maggior prodotto delle due parti di $2m$ sarà m^2; ma se abbiamo $p=m^2$, si ricava $x=m$; dunque *il maggior prodotto possibile delle due parti d'un numero è uguale al quadrato della metà di questo numero.*

190. Medesimamente, se venga proposto di dividere un numero $2m$ in due parti tali, che la somma delle radici quadrate di queste due parti sia un *massimo*, ragioneremo così:

Indicando con x^2 una delle parti, l'altra sarà

$$2m-x^2,$$

e si rappresenterà la somma delle loro radici con

$$x+\sqrt{2m-x^2}.$$

Bisogna dunque determinare il massimo di questa espressione.

Rappresentiamo con y questo valore, e si avrà:

$$x+\sqrt{2m-x^2}=y, \quad \text{o} \quad \sqrt{2m-x^2}=y-x.$$

Innalzando tutto al quadrato, si otterrà:

$$2m-x^2=y^2-2xy+x^2,$$

da cui

$$2x^2-2xy=2m-y^2$$

ed

$$x^2-xy=\frac{2m-y^2}{2},$$

equazione che dà

$$x=\frac{y}{2}\pm\sqrt{\frac{y^2}{4}+\frac{2m-y^2}{2}};$$

ovvero

$$x=\frac{y}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4m-y^2}.$$

L'ispezione di questo radicale ci mostra che per avere valori reali d'x, bisogna che y^2 sia minore di $4m$, o almeno che non lo superi, e da ciò segue che

$$2\sqrt{m}$$

è il maggior valore che possa ricevere y; allora se si fa

$$y=2\sqrt{m},$$

si deduce

$$x=\sqrt{m},\quad x^2=m,\quad \text{e}\quad 2m-x^2=m;$$

il che significa che il numero m dev'essere diviso in due parti uguali affinchè la somma delle radici quadrate di queste due parti sia un *massimo*.

191. Altro problema. — *Decomporre il numero* 2m *in due parti tali, che la somma dei loro quadrati sia un* minimo.

Rappresentando con x una delle due parti, l'altra è $2m-x$, e la somma dei loro quadrati viene espressa da

$$x^2+(2m-x)^2.$$

Facendo ora

$$x^2+(2m-x)^2=s,$$

e risolvendo questa equazione rispetto ad x, si ha

$$x=m\pm\sqrt{\frac{s}{2}-m^2}.$$

Ora, affinchè x sia quantità reale è necessario e sufficiente che $\frac{s}{2}-m^2$ sia quantità positiva, cioè che $\frac{s}{2}$ sia maggiore di m^2 o uguale a m^2; per conseguenza il minor valore d's è $2m^2$.

Ponendo $s=2m^2$, si ha $x=m$; dunque il numero dato $2m$ deve dividersi in due parti uguali, onde la somma dei quadrati di queste due parti sia un *minimo*.

192. Altro problema. — *Di tutti i rettangoli che hanno lo stesso perimetro, trovare quello di area massima.*

Sia p il semiperimetro ed s l'area di un rettangolo. Chiamando x un lato, l'altro sarà $y=p-x$, e si avrà

$$xy=x(p-x)=s;$$

risolvendo, rispetto ad x, questa equazione di secondo grado, si trova

$$x=\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{1}{4}p^2-s.}$$

Perchè il rettangolo esista, il valore d'x dev'essere reale; onde dev'essere positiva la quantità sotto al radicale; ossìa si dovrà avere

$$s<\frac{1}{4}p^2.$$

Epperò il valore massimo di s sarà $\frac{1}{4}p^2$. E per questo valore diviene

$$x=y=\frac{1}{2}p.$$

ossia il rettangolo diventa un quadrato.

ESERCIZI.

LXXVII. Qual è il rettangolo di perimetro massimo che può inscriversi in un circolo?

Resultato: Il quadrato.

LXXVIII. Qual è il rombo di superficie minima, il quale possa circoscriversi ad un circolo?

Resultato: Il quadrato.

LXXIX. Dividere un numero a in due parti tali, che dividendo la prima per la seconda e la seconda

per la prima, la somma dei quozienti sia la minore possibile.

Resultato: $$\frac{x}{a-x}+\frac{a-x}{x}=m.$$

Il problema è risoluto, dividendo il numero dato in due parti uguali.

LXXX. Dato il prodotto p di due numeri, trovare il minimo della loro somma.

Resultato: $$x(s-x)=p.$$

Il problema è risoluto, estraendo la radice quadrata dal numero dato.

Equazioni
che si riducono a quelle di secondo grado.

193. Si chiamano, in generale, *equazioni binomie*, o anche *a due termini*, tutte quelle che si possono ridurre alla forma

$$x^m=\pm q,$$

nelle quali l'esponente m è intero e positivo.

194. Per risolvere tali equazioni si riducono alla forma predetta, e poi da ambo i membri si estrae una radice d'indice uguale al grado dell'equazione medesima, facendo precedere la soluzione del doppio segno $\pm$, se il grado è pari, e dal solo segno delle quantità q, se il grado è impari.

195. Esempio 1.° — Sia $2x^4-180=332$.

Trasportando il termine cognito 180 nel secondo

membro, e dividendo per 2 si ha successivamente:

$$2x^4=332+180, \quad \text{e} \quad x^4=\frac{512}{2}=256.$$

Estraendo la radice quarta, o la radice quadrata della radice quadrata da ambi i membri, si avrà:

$$x=\pm\sqrt[4]{256}=\pm\sqrt{\sqrt{256}}=\pm4.$$

196. Esempio 2.° — Sia $x^3+14=-111$.
Trasportando, e riducendo, si ha:

$$x^3=-125, \quad \text{da cui} \quad x=-\sqrt[3]{125}=-5.$$

197. Si dicono *equazioni trinomie* o *a tre termini* tutte quelle che possono assumere la forma

$$(1) \ldots . \ x^{2m}\pm px^m=\pm q,$$

nelle quali l'incognita entra solamente in due termini con due esponenti differenti, uno doppio dell'altro.

198. La risoluzione di tali equazioni si fa dipendere da quella di un'equazione di secondo grado, e di una equazione binomia.

Infatti, se poniamo $x^m=z$, l'equazione (1) diviene:

$$z^2+pz+q=0, \quad \text{da cui} \quad z=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

e sostituendo x^m a z, si avrà

$$x^m=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

dalla quale, estratta la radice m^{esima}, si otterrà:

$$x=\sqrt[m]{-p^2\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}.$$

199. Fra le equazioni trinomie distinguonsi quelle di quarto grado, dette *biquadrate*, le quali non contengono altre potenze dell' incognita che il suo quadrato e il quadrato di questo quadrato. — La forma generale delle equazioni biquadrate è

$$ax^4+bx^2+c=0 \ldots\ldots (1)$$

Se facciamo $x^2=y$, prendendo per nuova incognita y, l'equazione precedente si riduce all' equazione di secondo grado

$$ay^2+by+c=0 \ldots\ldots (2)$$

della quale si deduce

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Ma poichè $x=\pm\sqrt{y}$, si ha finalmente

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \ldots\ldots (3)$$

Ciascuno dei valori d'y dà per x due valori uguali e di segno contrario. Talchè l'equazione biquadrata (1) ammette quattro radici uguali due a due e di segni contrari, cioè:

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}},$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

Se l'equazione (2) ha le sue due radici reali e positive, l'equazione biquadrata ha le sue quattro radici

reali. Se una delle radici dell'equazione (2) è positiva e l'altra negativa, l'equazione (1) ammette due radici reali e immaginarie. Se le due radici dell'equazione (2) sono reali e negative, le quattro radici dell' equazione (1) sono immaginarie.

200. Applichiamo la formula (3) alla soluzione di alcune equazioni biquadrate.

1.ª Risolvere l'equazione

$$\frac{x^4}{2}-x^2=\frac{3x^2}{2}-\frac{9-x^4}{4}.$$

Riducendo l'equazione, si ha

$$x^4-10x^2=-9,$$

d' onde

$$x=\pm\sqrt{5\pm\sqrt{25-9}}=\pm\sqrt{5\pm4}.$$

Dunque

$$x=3;\quad x=-3;\quad x=1;\quad x=-1.$$

Le radici in questo caso sono tutte reali, due positive e due negative.

2.ª Risolvere l' equazione

$$x^4-20x^2=576.$$

Facendo $x^2=y$, si ottiene

$$y^2-20y=576,$$

da cui

$$y=10\pm\sqrt{576+100},$$

e

$$x=\pm\sqrt{10\pm\sqrt{676}}.$$

Dunque

$$x=6;\quad x=-6;\quad x=4\sqrt{-1};\quad x=-4\sqrt{-1}.$$

3.ª Risolvere l'equazione

$$x^4+4x^2=-3.$$

Si avrà

$$x=\pm\sqrt{-2\pm\sqrt{4-3}}=\pm\sqrt{-2\pm1}.$$

Da cui

$$x=\pm\sqrt{-3}; \quad x=\pm\sqrt{-1},$$

radici tutte immaginarie.

ESERCIZI.

LXXXI. Risolvere le seguenti equazioni:

$$\frac{x^4}{7}=3x^2+196.$$

Resultato: $x=\pm7$; $x=\sqrt{-28}$; $x=\pm2\sqrt{-7}$.

$$x^2+\frac{p^2}{x^2}=2q.$$

Resultato:

$$x=\pm\sqrt{q\pm\sqrt{q^2-p^2}}=\pm\sqrt{q\pm\sqrt{(q+p)(q-p)}}.$$

$$\frac{x^4}{4}+4x^2=-4+\frac{33}{4}.$$

Resultato: $x=\pm1$; $x=\pm\sqrt{-17}$.

$$2x^4+10x^2=1500.$$

Resultato: $x=\pm5$; $x=\sqrt{-30}$.

Problemi.

105. La somma dei quadrati di due numeri è 640, e il prodotto degli stessi numeri è 192; trovare i numeri.
Resultato: I due numeri sono 8 e 24.

106. Trovare due numeri, il cui prodotto sia 400, e la somma dei loro quadrati sia 881.
Resultato: I due numeri sono 25 e 16.

107. La quarta potenza d'un numero, diminuita del quadrato di questo numero, uguaglia 1260. — Trovare questo numero.
Resultato: Il numero è 6.

108. Un tale, richiesto dell'età de' suoi figli, rispose: essi hanno fra tutti e due 9 anni, e se volete sapere l'età di ciascuno, dividete il doppio del detto numero in due fattori tali, che la differenza dei loro quadrati sia 27. — Quanti anni aveva ciascuno?
Resultato: Uno aveva 6 anni; l'altro 5.

APPLICAZIONE ALLA GEOMETRIA.

109. Trovare le dimensioni d'un rettangolo, sapendo che la sua area è di 120 metri quadrati, e che la somma delle aeree dei quadrati fatti su queste dimensioni è 289 metri quadrati.
Resultato: Dimensioni: 15^m; e 8^m.

110. L'ipotenusa d'un triangolo rettangolo è 20^m, e la sua area 96 m. q. — Trovare i cateti.
Resultato: $c=16$; $c'=12$.

Trasformazione dell'espressione

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}.$$

201. La soluzione dell'equazione biquadrata

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

ha dato un resultato della forma

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}},$$

essendo a e b quantità razionali e $\sqrt{b}$ essendo ordinariamente una quantità irrazionale.

Ciò posto, si ha per esempio

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6},$$

e per conseguenza,

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \ldots\ldots (1);$$

d' altronde

$$\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

è della forma indicata da

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}};$$

dunque dalla relazione (1) è facile dedurre che una espressione della forma

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$$

può qualche volta essere sostituita dalla forma

$$\sqrt{p} + \sqrt{q},$$

nella quale p e q sieno, come 3 e 2, quantità razionali.

Infatti, innalzando al quadrato ambo i membri dell'equazione

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{p}+\sqrt{q} \ldots . (2)$$

si ottiene

$$a+\sqrt{b}=p+q+2\sqrt{pq};$$

la quale equazione è sodisfatta, quando si abbia

$$\begin{cases} a=p+q \\ \sqrt{b}=2\sqrt{pq} \end{cases} \text{ ossia } \begin{cases} a=p+q \\ b=4pq \end{cases} \text{ ovvero } \begin{cases} a=p+q \\ \frac{b}{4}=pq. \end{cases}$$

Queste due ultime equazioni fanno vedere (numeri 180 e 181) che p e q sono le radici dell' equazione

$$x^2-ax=-\frac{b}{4};$$

cioè che

$$p=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} \quad \text{e} \quad q=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}.$$

Sostituendo adunque questi valori nell' equazione (2), si avrà

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}};$$

la qual formula è vera qualunque sieno a e b, ma non è utile che nei casi speciali, in cui a^2-b è un quadrato.

202. Facendo

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{p}-\sqrt{q},$$

ed innalzando al quadrato, si ha

$$a-\sqrt{b}=p+q-2\sqrt{pq}.$$

Questa equazione essendo sodisfatta ancora quando si abbia

$$a=p+q \quad \text{e} \quad \sqrt{b}=2\sqrt{pq},$$

si deduce analogamente

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}-\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2+b}}{2}}.$$

Facendo

$$\sqrt{a^2-b}=c,$$

sarà dunque

$$\pm\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\pm\left(\sqrt{\frac{a+c}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-c}{2}}\right).$$

203. Applicazioni della formula. — 1.ª Abbiasi l'espressione

$$\sqrt{9+\sqrt{56}}.$$

In questo caso avremo

$$a^2-b=81-56=25,$$

e perciò $c=5$. Per conseguenza

$$\sqrt{9+\sqrt{56}}=\sqrt{\frac{9+5}{2}}+\sqrt{\frac{9-5}{2}}=\sqrt{7}+\sqrt{2}.$$

2.ª Sappiamo dalla Geometria che chiamando r il

raggio d'un circolo, a il lato d'un poligono regolare inscritto, e x il lato d'un poligono regolare inscritto di un numero doppio di lati, si ha

$$x=\sqrt{2r^2-\sqrt{4r^4-4a^2r^2}}.$$

In questo caso abbiamo

$$a^2-b=4r^4-(4r^4-4a^2r^2)=4a^2r^2\,;$$

donde

$$c=2ar\,;$$

per conseguenza:

$$x=\sqrt{\frac{2r^2+2ar}{2}}-\sqrt{\frac{2r^2-2ar}{2}},$$

e riducendo:

$$x=\sqrt{r(r+a)}-\sqrt{r(-a)}.$$

ESERCIZI.

LXXXII. Trasformare l' espressione

$$\sqrt{3+\sqrt{5}}.$$

Resultato:

$$\sqrt{\frac{5}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}.$$

LXXXIII. Trasformare l' espressione

$$\sqrt{6-\sqrt{11}}.$$

Resultato:

$$\sqrt{\frac{11}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{22}-\sqrt{2}}{2}$$

LXXXIV. Trasformare l'espressione

$$\sqrt{12 \pm \sqrt{140}}.$$

Resultato:

$$\sqrt{7} \pm \sqrt{5}.$$

Equazioni di secondo grado a due incognite.

204. Quanto al modo di risolvere un sistema di due equazioni di secondo grado con due incognite sono da farsi diverse considerazioni; cioè:

1.ª Se una sola delle incognite è innalzata al quadrato in ambedue le equazioni, si deduce primieramente il valore di questo quadrato da una delle equazioni, e poi si sostituisce nell'altra, la quale non avrà più che un' incognita.

Esempio 1.° — Sia il sistema delle due equazioni

$$x^2+y=b,$$
$$x^2-y=a.$$

Dalla prima si ha

$$x^2=b-y;$$

sostituendo nella seconda, troveremo:

$$b-y-y=a, \quad \text{ovvero} \quad b-2y=a,$$

da cui

$$-2y=a-b, \quad \text{oppure} \quad 2y=b-a,$$

e

$$y=\frac{b-a}{2}.$$

Sostituendo questo valore d'y nella prima, avremo:

$$x^2+\frac{b-a}{2}=b,$$

da cui

$$x^2=b-\left(\frac{b-a}{2}\right),$$

ovvero

$$x^2=\frac{2b-b+a}{2}, \quad \text{ossia} \quad x^2=\frac{b+a}{2},$$

da cui

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}.$$

Dunque

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}, \quad \text{e} \quad y=\frac{b-a}{2}.$$

Gli stessi resultati si sarebbero ottenuti prendendo il valore d'x^2 in ambedue le equazioni, e paragonando poi questi due valori fra loro.

205. 2.ª Se l'incognita è innalzata al quadrato in una sola delle equazioni, si ricava il valore dell'altra incognita da una delle due equazioni e poi si sostituisce nell'altra equazione, la quale non avrà più che un'incognita.

Esempio 2.º — Abbiasi il sistema delle due equazioni

$$x-y=a,$$
$$y^2-x=b.$$

Dalla prima si ha

$$x=a+y;$$

sostituendo questo valore nella seconda, avremo:

$$y^2-(a+y)=b, \quad \text{ovvero} \quad y^2-y=a+b,$$

equazione, dalla quale rilevasi

$$y=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+a+b}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4a+4b+1},$$

e per conseguenza

$$x=a+\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+a+b}=a+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{4a+4b+1}.$$

206. 3.ª Se le due incognite sono moltiplicate l'una per l'altra, si opererebbe come segue:

Esempio 3.° — Sieno le due equazioni

$$x+y=a,$$
$$xy=b.$$

Dalla prima si ha

$$x=a-y,$$

e dalla seconda

$$x=\frac{b}{y};$$

per conseguenza

$$a-y=\frac{b}{y};$$

quindi

$$ay-y^2=b, \quad \text{ovvero} \quad y^2-ay=-b,$$

da cui

$$y=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}, \quad \text{ovvero} \quad y=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

e

$$y=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

Collo stesso metodo troveremo

$$x=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2}, \quad \text{e} \quad x=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

207. Abbiasi ora il sistema di due equazioni particolari di secondo grado

$$a(x+)y=bxy \ldots\ldots 1.^a$$

$$x^2-y^2=bxy \ldots\ldots 2.^a$$

Essendo uguali i secondi membri, avremo:

$$x^2-y^2=a(x+y).$$

Scomponendo in fattori il primo membro, risulta

$$(x+y)(x-y)=a(x=y),$$

equazione che, divisa per $x+y$, dà

$$x-y=a, \quad \text{d'onde} \quad x=a+y,$$

valore che sostituito nella 1.ª, dà

$$by(a+y)=a(a+2y),$$

ossia,

$$by^2+bay=2ay+a^2,$$

equazione di secondo grado colla sola incognita y, la cui soluzione non presenta difficoltà.

208. In generale, quando le due equazioni a due incognite sono entrambe di secondo grado, si cerca, se è possibile, di ridurne una al primo grado; e si opera come al n.° 203. — Ove poi tale trasformazione non potesse aver luogo, per evitare i radicali

nell'eliminazione, si farebbe primieramente scomparire il quadrato d'una delle incognite col metodo di paragone, poi col mezzo dell' equazione risultante si cercherebbe il valore di questa incognita, che si sostituirebbe in una delle equazioni proposte. Bisogna però avvertire che in questo caso trovasi un' equazione di quarto grado, la cui soluzione non può esser trattata in questi elementi; ma che in certe circostanze si può ridurre ad un' equazione di secondo grado.

Esempio. — Sieno le due equazioni

$$(1) \ldots\ldots x^2+y^2=xy+y+5.$$
$$(2) \ldots\ldots x^2-xy=y+1.$$

Dalla seconda si ricava la

$$(3) \ldots\ldots y=x-1\,;$$

sostituendo questo valore nella (1), essa diviene

$$x^2+(x-1)^2=x(x-1)+(x-1)+5\,;$$

e sviluppando,

$$x^2+x^2-2x+1=x^2-x+x-1+5,$$

ossia, trasportando e riducendo,

$$x^2-2x=3,$$

da cui

$$x=3.$$

Sostituendo questo valore nella (3) si ha

$$y=3-1=2.$$

209. Da ciò che precede può concludersi che per la soluzione di due equazioni di secondo grado con due incognite non havvi una regola generale e costante a cui attenersi; che cioè i metodi da seguirsi variano secondo i casi; e che perciò la loro scelta dipende dalla forma delle equazioni da risolversi.

ESERCIZI.

LXXXV. Risolvere i seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x^2+y^2=a, \\ x^2-y^2=b. \end{cases}$$

Resultato:

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+b}{2}}, \quad y=\pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x^2+y^2=b. \end{cases}$$

Resultato:

$$x=\frac{a+\sqrt{2b-a^2}}{2}, \quad y=\frac{a-\sqrt{2b-a^2}}{2},$$

ovvero

$$x=\frac{a-\sqrt{2b-a^2}}{2}, \quad y=\frac{a+\sqrt{2b-a^2}}{2}.$$

$$\begin{cases} x^2+y=19, \\ x^2-y=13, \end{cases}$$

Resultato: $x=4$; $y=3$.

$$\begin{cases} x-y=3, \\ y^2-x=17. \end{cases}$$

Resultato: $x=8$; $y=5$.

$$\begin{cases} x+y=18, \\ xy=80. \end{cases}$$

Resultato: $x=10$; $y=8$.

Problemi.

111. La somma di due numeri è 25, e la differenza dei loro quadrati è 7; trovare questi due numeri.

Resultato: I due numeri sono 9 e 16.

112. La somma di due numeri è 12, e la somma dei loro quadrati è 80; determinare questi due numeri.

Resultato: I due numeri sono 8 e 4.

113. Se dal quadrato d'un numero si toglie un secondo numero, si ha per resto 17; se invece al quadrato del primo si aggiunge il secondo numero, si ottiene 33; trovare i due numeri.

Resultato: I due numeri sono 25 e 8.

114. Trovare due numeri tali, che la somma dei loro quadrati sia 34, ed il prodotto degli stessi quadrati sia 225.

Resultato: I due numeri sono 5 e 3.

115. Un certo numero è formato di due cifre; la somma dei quadrati di esse è uguale al numero aumentato del prodotto delle cifre medesime, ed inoltre se questo numero si aumenta di 36 si ha per somma lo stesso numero rovesciato; trovare il numero.

Resultato: Si hanno i due numeri 37 e 48.

APPLICAZIONE ALLA GEOMETRIA.

116. Il perimetro d'un triangolo rettangolo è di 12 metri, e la sua superficie è di 6 metri quadrati; trovare il valore dei suoi lati.

Resultato: Lati: 3^m, 4^m, 5^m.

117. Trovare la base e l'altezza d'un triangolo, sapendo che l'area è di 40 metri quadrati e che la somma della base coll' altezza è di 18 metri.

Resultato: Base: 10^m; altezza: 8^m.

118. L'area d'un rettangolo è di 300 m. q., e quella di un altro rettangolo è pure di 300 m. q.; però la lunghezza del secondo rettangolo è minore 8 metri di quella del primo, e la larghezza è 10 metri maggiore; trovare le dimensioni del primo rettangolo.

Resultato: Dimensioni 20^m e 15^m.

Delle disuguaglianze.

210. Si dice che un numero N è maggiore d'un altro numero N', quando la differenza $N-N'$ è positiva.

Per questa definizione qualunque numero positivo è maggiore di un numero negativo, e i numeri negativi sono tanto maggiori, quanto minore è il loro valore assoluto.

Per esempio:

$$10>4; \quad 1>-3; \quad -2>-8; \quad 0>-5; \quad a>-b.$$

211. Allorchè una quantità, dipendente da un numero incognito, dev'esser maggiore o minore di un'altra, l'espressione algebrica di questa condizione dicesi *disuguaglianza,* e dà il modo di determinare dei limiti, tra cui l'incognita deve o non deve essere compresa. La ricerca di siffatti limiti fondasi sull'applicazione dei seguenti

Principii generali.

1.° *Si può aggiungere ai due membri di una disuguaglianza, o togliere da essi, uno stesso numero, senza alterarla, nè cambiarne il senso; e per conseguenza, come nelle equazioni, si può trasportare un termine da un membro all'altro, con segno contrario.*

Così, se $N > N'$, sarà $N \pm m > N' \pm m$, qualunque sia il valore di m.

Infatti, la differenza di due numeri N ed N' non resta alterata, aumentandoli o diminuendoli egualmente; per conseguenza la loro disuguaglianza primitiva resta la stessa e nel medesimo senso, dopo l'addizione o sottrazione di m.

ESEMPI:

Sia $3>-7$, sarà $3+5>-7+5$; $3-5>-7-5$.

Sia $a+b>c$, sarà $a>c-b$; se $10+8>12$, sarà $10>12-8$.

Sia $a-b>c$, sarà $a>c+b$; se $10-2>6$, sarà $10>6+2$.

2.° *Si possono moltiplicare o dividere i due membri di una disuguaglianza per uno stesso numero, senza che resti cangiata di senso, purchè questo numero sia positivo.*

Così, se
$$N>N'$$
sarà
$$Nm>N'm; \quad \frac{N}{m}>\frac{N'}{m},$$
purchè sia $m>0$.

Infatti, la differenza $N-N'$ essendo positiva, il prodotto od il quoziente di questa quantità per il numero positivo m è parimente positivo.

ESEMPI:

Sia $2>-3$, sarà $2\times7>-3\times7$; se $-3<-2$, sarà $-15<-10$; se $18>15$, sarà $\frac{18}{3}>\frac{15}{3}$; se $-8<-6$, sarà $-\frac{8}{2}<-\frac{6}{2}$.

212. Corollario 1.° — Per questo principio *si possono sempre fare sparire i denominatori di una disuguaglianza.*

Abbiasi

$$\frac{x^2-x}{2a}>\frac{a^2+b}{3x};$$

moltiplicando ambo i membri per $2a$ e per $3x$, ossia per $6ax$, avremo

$$3x(x^2-x)>2a(a^2+b).$$

213. Corollario 2.° — *Moltiplicando o dividendo i due membri di una disuguaglianza per uno stesso numero negativo, là disuguaglianza sussiste ancora, ma in senso inverso.*

Così, se $N>N'$ e $m<0$, sarà $Nm<N'm$, e $\frac{N}{m}<\frac{N'}{m}$.

Sia $18>-20$; facendo $m=-3$, sarà $-54<60$.

214. Corollario 3.° — *Non si può cambiare il segno a tutti i termini d'una disuguaglianza, a meno che non se ne cangi il senso;* perchè tale operazione equivale a moltiplicarne i due membri per -1.

3.° *Si possono innalzare al quadrato i due membri di una disuguaglianza, purchè ambedue sieno positivi.*

Così, se $7>3$, sarà $49>9$; se $a+b>c$, sarà $(a+b)^2>c^2$.

Così, sommando le disuguaglianze

$$a>b, \quad d>e, \quad m>n,$$

si ha

$$a+d+m>b+e+n.$$

Se

$5>2$, $8>-15$, $-3>-9$, sarà $5+8-3>2-15-9$.

215. Corollario. — Se invece dell'addizione si eseguiscono la sottrazione o la divisione, non si può *a priori* stabilire in qual senso risulti la disuguaglianza.

Così, dalle due disuguaglianze $10>3$ e $8>5$, sottraendo membro a membro, si ottiene $2>-2$.

Ma $8<9$ e $5<7$ dànno $3>2$.

E dividendo membro a membro le due disuguaglianze $18>12$ e $6>3$, trovasi $\frac{18}{6}<\frac{12}{3}$.

6.° *Non si possono sottrarre membro a membro due disuguaglianze se non di senso contrario; ed in questo caso la disuguaglianza che si ottiene ha il medesimo senso di quella da cui si sottrae l'altra.*

Così, da $5>3$, $2>0$ non si può ricavarne

$$5-2>3-0, \quad \text{o} \quad 3>3.$$

Ma da $5>3$, $0<2$ si ricava $5-0>3-2$, o $5>1$.

7.° *Due o più disuguaglianze del medesimo senso si possono moltiplicare membro a membro per averne un'altra nel medesimo senso, purchè i loro membri sieno positivi.*

Così, da $a<b$, $c<d$ si ricava $ac<bd$;

ma da $-2>-3$, $-5>-12$ non si può dedurre

$$(-2)\times(-5)>(-3)\times(-12).$$

216. 8.° *Due disuguaglianze di senso contrario e coi membri positivi si possono dividere membro a membro per ottenere una nuova disuguaglianza, la quale avrà lo stesso senso di quella che è stata divisa.*

Così, le due disuguaglianze $a>b$, $c<d$ dànno $a:c>b:d$.

Risoluzione delle disuguaglianze

Disuguaglianze di primo grado.

217. Una disuguaglianza ad un'incognita si dice *di primo grado*, quando può ridursi alla forma

$$Ax+B>A'x+B',$$

essendo A, B, A', B', numeri dati.

Per risolvere tale disuguaglianza, cioè per iscoprire i limiti del valore dell'incognita (n.° 211), trasporto $A'x$ nel primo membro e B nel secondo con segni contrari, ed ho

$$(A-A')x>B'-B;$$

dividendo i due membri per $A-A'$, si trova

$$x>\frac{B'-B}{A-A'} \quad \text{ovvero} \quad x<\frac{B'-B}{A-A'},$$

secondochè questa differenza è positiva o negativa.

Esempio. — Risolvere la disuglianza

$$2x-\frac{4}{3}+\frac{x}{2}>5+x.$$

Moltiplico tutti i termini per 6, ed ho:

$$12x-8+3x>30+6x.$$

Fo passare tutti i termini incogniti nel primo membro, ed ho

$$12x+3x-6x>30+8;$$

d'onde $9x>38$; e finalmente $x>\frac{38}{9}$;

cioè x può avere per valori tutti i numeri maggiori di $\frac{38}{9}$, che è il suo *limite* inferiore.

218. Più disuguaglianze contenenti la stessa incognita x dànno ciascuna un limite della medesima.

Esempio. — Sieno le due disuguaglianze

$$(1) \ldots\ldots 5x+1<2x+20,$$

$$(2) \ldots\ldots \frac{x-1}{x+3}>\frac{4}{5}.$$

Dalla (1) si ricava .... $x<19$;
dalla (2) .... $x>17$.

È chiaro che x, dovendo esser compreso fra 17 e 19, avrà un numero infinito di valori frazionari; e che se x dev'essere intero, il problema ammette una sola soluzione, cioè $x=18$.

Disuguaglianze di secondo grado.

219. Una disuguaglianza ad un'incognita dicesi *di secondo grado*, quando si può ridurre ad una delle due forme

$$x^2+px+q>0, \quad \text{ovvero} \quad x^2+px+q<0,$$

secondochè

$$x^2+px+q$$

è quantità positiva o negativa.

220. In tali disuguaglianze si uguaglia a *zero* il primo membro, e risolvendo l' equazione che ne risulta, le due radici determinano i limiti dei valori dell'incognita.

Esempio. — Abbiasi la disuguaglianza

$$x^2+8-21x>2-11x-3x^2.$$

Trasportando nel primo membro le quantità incognite, e nel secondo le quantità note, con segno contrario, la disuglianza diviene

$$x^2+3x^2-21x+11x>2-8;$$

e riducendo, si ha

$$x^2-\frac{5x}{2}>-\frac{3}{2}, \quad \text{o} \quad x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}>0;$$

ovvero, uguagliando a *zero* il primo membro

$$x^2-\frac{5x}{2}+\frac{3}{2}=0.$$

Risolvendo questa equazione, si troverà

$$x=\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x=1.$$

Dunque, affinchè la disuguaglianza sussista è necessario che x sia compresa fra le due radici, cioè che sia

$$x>\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x<1;$$

o, in altre parole, in questo caso la disuguaglianza proposta rimane soddisfatta da tutti i numeri che superano la radice maggiore $\frac{5}{2}$, e da tutti i numeri che sono al disotto della radice minore 1.

221. Quando le radici sono immaginarie, la disuguaglianza proposta è sodisfatta per qualunque valore dell'incognita, non avendo essa alcun limite.

ESERCIZI.

LXXXVI. Risolvere le disuguaglianze

$$\frac{5x}{3}-\frac{3}{4}>\frac{5}{2}+\frac{7x}{12}.$$

Resultato: $x>3.$

$$\frac{3x-11}{x}>2.$$

Resultato: $x>11.$

$$\frac{5z}{3}-\frac{7b}{4}>\frac{6z}{10}-\frac{3b}{2}.$$

Resultato: $z>\frac{15b}{64}.$

$$ax+b>cx+d.$$

Resultato: $x>\frac{d-b}{a-c}.$

$$x^2+8x-20<0.$$

Resultato: $x=+2;\quad x=-10,$
cioè, soddisfano i numeri >2, e quelli <-10.

$$-3x^2-5x-\frac{4}{3}>0.$$

Resultato: $x=-\frac{1}{3};\quad x=-\frac{4}{3},$

cioè, soddisfano i numeri $>-\frac{1}{3}$, e quelli $<-\frac{4}{3}$.

PROBLEMI:

119. Qual è il numero il cui terzo diminuito di 3 è maggiore del suo quinto aumentato di 5?

Resultato: Qualunque numero maggiore di 60.

120. Qual è il numero intero il cui quadruplo diminuito di 7 è minore del doppio aumentato di 3, e tale inoltre che il triplo aggiunto all'unità sia maggiore di 13 diminuito del numero cercato?

Resultato: Il numero domandato è 4.

121. Qual è il numero intero il cui doppio diminuito di 5 è maggiore di 25, e il cui triplo diminuito di 7 è minore del doppio aumentato di 13?

Resultato: I numeri 16, 17, 18 e 19 sono i soli che rispondono alla domanda.

122. Dividere il numero 30 in due parti intere e tali che il triplo della minore superi il doppio della maggiore.

Resultato: $x=13$ o 14; la parte maggiore è 17 o 16.

123. Quali sono i valori positivi d'x, per cui la espressione $\frac{3x-11}{x}$ prende valori maggiori di 2?

Resultato: I numeri maggiori di 11.

124. Determinare i limiti dei valori d'x che rendono positivo il trinomio

$$-3x^2+25x-28.$$

Resultato: I valori compresi fra 7 e $\frac{4}{3}$.

Principii intorno alla teoria delle combinazioni e loro applicazione alla dimostrazione della formula del Binomio di Newton.

222. Chiamansi *permutazioni* i resultati che si ottengono, disponendo un numero di oggetti gli uni di seguito agli altri ed in tutti gli ordini possibili in modo, che tutti entrino ed una sola volta in ciascun resultato.

Così, le permutazioni di due lettere a e b sono ab e ba.

Le permutazioni di tre lettere a, b, c saranno

$$abc,\ acb,\ cab,\ bac,\ bca,\ cba,$$

le quali si ottengono ponendo la lettera c a destra, in mezzo e a sinistra di ciascuno dei resultati ottenuti colle due lettere a e b.

Le permutazioni di quattro lettere saranno

$$\begin{array}{l} adbc,\ abdc,\ abcd,\ dabc,\ adcb,\ acdb,\ acbd,\ dacb, \\ cdab,\ cadb,\ cabd,\ dcab,\ bdac,\ badc,\ bacd,\ dbac, \\ bdca,\ bcda,\ bcad,\ dbca,\ cdba,\ cbda,\ cbad,\ dcba, \end{array}$$

le quali si ottengono facendo passare la lettera d successivamente da destra a sinistra e viceversa in tutte le possibili posizioni (cioè quattro) in ognuno dei sei resultati trovati con tre lettere; e così si ottengono 24 permutazioni.

223. Da ciò che precede resulta che con una lettera, od un oggetto solo, non si ottiene che una permutazione; con 2 oggetti se ne hanno 2, cioè 1×2; con 3 oggetti se ne ottengono 6, cioè $1\times2\times3$; con

4 se ne hanno 24, cioè $1\times2\times3\times4$; con 5 se ne ottengono $1\times2\times3\times4\times5$, cioè 120, ecc.

Se dunque rappresentiamo con P_n il numero delle permutazioni di n oggetti, si avrà la formula

$$P_n = P_{n-1}\times n = 1\times2\times3\times4\times5\times6 \ldots \times n;$$

vale a dire che *il numero delle permutazioni ottenute con* n *oggetti è uguale al prodotto di* n *fattori, di cui il primo è* 1, *e gli altri si formano aggiungendo successivamente* 1 *al precedente.*

Esempio. — Per sapere quante sono le permutazioni di 12 oggetti, o lettere, basterà fare $n=12$, e per la formula precedente, avremo:

$$P_{12} = 1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10\times11\times12$$
$$= 479001600.$$

221. Si chiamano *disposizioni* i risultati che si ottengono disponendo un numero di oggetti gli uni di seguito agli altri e in tutti gli ordini possibili, 2 a 2, 3 a 3, 4 a 4,.... n a n, essendo $n<m$.

Così, avendo 4 lettere a, b, c, d, disponendole 1 a 1, si ha

$$a,\ b,\ c,\ d,$$

disponendole 2 a 2, col porre a destra di ciascuna le altre 3, si avrà

$$ab,\ ac,\ ad;\quad ba,\ bc,\ bd;\quad ca,\ cb,\ cd;\quad da,\ db,\ dc;$$

ed è chiaro che, in questo esempio, ponendo a destra di ciascuna delle 4 lettere ognuna delle altre 3, si ottengono $4\times3=12$ disposizioni, cioè quante ne sono indicate in $4\times(4-1)$.

In generale, m lettere, disposte 2 a 2 dànno $m(m-1)$ disposizioni.

Se le quattro lettere a, b, c, d si dispongono 3 a 3, collocando a destra di ciascun resultato di 2 lettere ognuna delle altre 2, che non vi entrano, si otterrà

$$\begin{array}{llllll} abc, & abd, & acb, & acd, & adb, & adc, \\ bac, & bad, & bca, & bcd, & bda, & bdc, \\ cab, & cad, & cba, & cbd, & cda, & cdb, \\ dab, & dac, & dba, & dbc, & dca, & dcb; \end{array}$$

ed è evidente che ponendo a destra d'ognuno dei 12 resultati già avuti ciascuna delle 2 lettere che restano, si ottengono

$$12\times2=24, \quad \text{ossia} \quad 4\times3\times2=24$$

disposizioni; ovvero tante quante ne indica

$$4\times(4-1)\times(4-2).$$

In generale, m lettere disposte 3 a 3 dànno

$$m(m-1)\,(m-2) \text{ disposizioni.}$$

Se le quattro lettere a, b, c, d si dispongono 4 a 4, collocando a destra di ogni resultato di 3 lettere la quarta lettera che manca, si otterranno ancora 24 resultati, i quali non sono altro che le

$$1\times2\times3\times4=24$$

permutazioni di 4 lettere, perocchè

$$4(4-1)\,(4-2)\,(4-3)=4\times3\times2\times1=1\times2\times3\times4.$$

225. Da quanto precede resulta che m oggetti, presi 1 a 1, dànno m disposizioni; presi 2 a 2, ne dànno $m(m-1)$; presi 3 a 3, ne dànno

$$m(m-1)\,(m-2);$$

presi 4 a 4, ne dànno

$$m(m-1)\,(m-2)\,(m-3), \text{ ecc.}$$

Se dunque rappresentiamo con $D_{m,n}$ il numero delle

disposizioni di m oggetti n ad n, si avrà la formula $D_{m,n}=m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4).....(m-n+1)$; vale a dire che *il numero delle disposizioni che si ottengono da* m *oggetti presi* n *a* n, *è uguale al prodotto di* n *fattori, di cui il primo è* m *e gli altri si formano togliendo successivamente una unità dal precedente.*

Esempio. — 20 oggetti presi 5 a 5 dànno 1860480 disposizioni, perchè dalla formula precedente, si ha

$$m=20, \quad n=5,$$

e quindi

$$D_{m,n}=20\times19\times18\times17\times16=1860480.$$

226. Si chiamano *combinazioni*, o *prodotti differenti*, le disposizioni di m oggetti n a n, delle quali due qualunque differiscono fra loro almeno per uno degli n oggetti.

Così, fra le disposizioni ottenute con 4 lettere prese 2 a 2, 3 a 3, ecc., alcune contengono le medesime lettere, sebbene disposte in un ordine inverso, altre differiscono fra loro per una o più lettere. — Delle 12 disposizioni di 4 lettere, prese 2 a 2, ciascuna entra 2 volte colle stesse lettere, perchè con 2 oggetti si ottengono

$$1\times2=2$$

permutazioni (n.° 225); dunque, per avere le combinazioni o i differenti prodotti, basta dividere in questo caso 12 per 2. — Per conseguenza, le combinazioni di m oggetti, presi 2 a 2, sono

$$\frac{m(m-1)}{1\times2}.$$

Delle 24 disposizioni di 4 lettere, prese 3 a 3, ciascuna entra 6 volte colle stesse lettere, perchè le permutazioni di 3 oggetti sono

$$1\times2\times3=6\,;$$

dunque, per avere le combinazioni o i prodotti differenti, è sufficiente in questo caso di dividere 24 per 6. — Per conseguenza, le combinazioni di m oggetti, presi 3 a 3, sono

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times2\times3}.$$

227. In generale, rappresentando con $C_{m,n}$ il numero delle combinazioni di m oggetti presi n a n, *esso trovasi dividendo il numero delle disposizioni di* m *oggetti, presi parimente* n *a* n, *pel numero delle permutazioni di* n *oggetti;* e si ha la formula

$$C_{m,n}=\frac{D_{m,n}}{P_n}=\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots..(m-n+1)}{1\times2\times3\times4\ldots..\times n}.$$

Esempio. — Volendo sapere quante sono le combinazioni di 20 lettere, prese 3 a 3, si ha

$$C=\frac{20\times19\times18}{1\times2\times3}=\frac{6840}{6}=1140.$$

Applicazione alla dimostrazione della formula del Binomio newtoniano.

228. Abbiansi più binomi

$$x+a,\quad x+b,\quad x+c,\quad \text{ecc.},$$

da moltiplicarsi successivamente fra loro; disponendo per colonne verticali le somme dei termini che hanno per fattore un' egual potenza d'x, si avrà:

1.° $(x+a)(x+b)=x^2 \left.\begin{array}{l}+a\\+b\end{array}\right| x + ab$

2.° $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3 \left.\begin{array}{l}+a\\+b\\+c\end{array}\right| x^2 \left.\begin{array}{l}+ab\\+ac\\+bc\end{array}\right| x + abc$

3.° $(x+a)(x+b)(x+c)(x-d)=x^4 \left.\begin{array}{l}+a\\+b\\+c\\+d\end{array}\right| x^3 \left.\begin{array}{l}+ab\\+ac\\+ad\\+bc\\+bd\\+cd\end{array}\right| x^2 \left.\begin{array}{l}+abc\\+abd\\+acd\\+bcd\end{array}\right| x + abcd;$

e così di seguito.

Da ciò si deduce:

1.° Che ciascun prodotto ha tanti termini, o tante collezioni di termini, quanti sono i fattori binomi, più uno.

2.° Che l'esponente x nel primo termine è uguale al numero dei fattori binomi; il quale diminuisce di un' unità da un termine all' altro, o da una collezione ad un' altra, fino all' ultimo, in cui ha l'esponente *zero*.

3.° Che il coefficiente del primo termine è l'unità; il coefficiente della collezione che gli succede è la somma dei secondi termini dei binomi; il coefficiente dell'altra collezione è la somma dei prodotti differenti 2 a 2 dei secondi termini dei binomi; il coefficiente della collezione successiva è la somma dei prodotti differenti 3 a 3 dei secondi termini dei binomi, e così di seguito; l'ultimo termine è il prodotto dei secondi termini dei binomi.

Questa legge essendo vera per m binomi è vera ancora per $(m+1)$ binomi, ossia è generale.

229. Se tutti i secondi termini dei binomi sono uguali, cioè

$$a=b=c=d\ldots\ldots$$

ciascun binomio si cambierà in $x+a$, ed il prodotto diverrà $(x+a)^m$.

In questo caso:

1.° La somma dei secondi termini dei binomi, cioè il coefficiente di x^{m-1}, sarà

$$a+a+a+a\ldots\ldots=ma.$$

2.° La somma dei prodotti differenti 2 a 2 dei secondi termini dei binomi, cioè il coefficiente di x^{m-2}, sarà

$$a^2+a^2+a^2+a^2+\ldots\ldots,$$

ossia a^2 aggiunto a sè stesso tante volte, quante sono le combinazioni di m lettere 2 a 2, cioè

$$\frac{m(m-1)}{1\times2}a^2.$$

3.° La somma dei prodotti differenti 3 a 3 dei secondi termini dei binomi, vale a dire il coefficiente di

x^{m-3}, sarà

$$a^3+a^3+a^3+a^3+\ldots\ldots,$$

cioè a^3 aggiunto a sè stesso tante volte, quante sono le combinazioni 3 a 3 di m lettere, vale a dire

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times2\times3}a^3.$$

In generale dunque, la somma dei prodotti differenti n a n dei secondi termini dei binomi, cioè il coefficiente dell'$(n+1)^{esimo}$ termine, che ne ha n avanti a sè, sarà

$$a^n+a^n+a^n+a^n+\ldots\ldots,$$

ossia a^n aggiunto a sè stesso tante volte, quante sono le combinazioni n a n di m lettere, vale a dire

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1\times2\times3\ldots\ldots\times n}a^n.$$

Finalmente il prodotto dei secondi termini dei binomi, cioè l'ultimo termine dello sviluppo, sarà a^m; e si avrà

$$(x+a)^m=x^m+max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\times2}a^2x^{m-2}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times2\times3}a^3x^{m-3}$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{1\times2\times3\ldots\ldots\ldots\times n}a^nx^{m-n}+\ldots..+a^m.$$

230. Se invece di $x+a$ si avesse il binomio $x-a$, onde svilupparne la sua potenza m^{esima}, basterebbe nella formula precedente cambiare a in $-a$; e poichè le potenze pari di $-a$ sono eguali a quelle di a e le

impari sono uguali ma di segno contrario, si avrà

$$(x-a)^m=x^m-max^{m-1}+\frac{m(m-1)}{1\times2}a^2x^{m-2}$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1\times2\times3}a^3x^{m-3}$$

$$+\ldots\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\times2\times3\ldots\times n}a^nx^{m-n}-\ldots\pm a^m.$$

Tal'è dunque la *formula del binomio newtoniano*, la quale conferma la legge esposta ai numeri 83, 84, 85, ecc.

Problemi.

125. Disponendo quattro a quattro le cifre significative aritmetiche, quanti numeri differenti si possono rappresentare?

Resultato: 3024.

126. In quanti modi si possono disporre in linea 5 soldati?

Resultato: In 120.

127. In quante maniere differenti 7 persone possono mettersi attorno ad una tavola?

Resultato: In 5040.

128. Quanti estratti, ambi, terni, e quante quaderne e quintine sono in 90 numeri?

Resultato:

Estratti,	Ambi,	Terni,	Quaderne,	Quintine,
90	4005	117480	2555190	43949268.

129. Facendo scegliere a sorte 15 carte da un mazzo di 32, quante combinazioni possibili possono farsi con queste 15 carte?

Resultato: 565722720.

130. Quante volte possono permutarsi fra loro ventiquattro lettere differenti?

Resultato: 620,448,401,733,239,439,360,000.

131. Fra tutte le permutazioni di *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, quante ve ne sono che cominciano per *a* o per *b*?

Resultato: Per *a* 720; per *b* 720.

132. Nel caso precedente, quante permutazioni si possono ottenere, le quali comincino per *ab*, per *abc* e per *abcd*?

Resultato: Per *ab* 120;
» *abc* 24;
» *abcd* 6.

133. Al giuoco del *picchetto*, composto di 32 carte, si dànno a ciascuno dei due giuocatori 12 carte, e 8 sono messe da parte. — Domandasi il numero di giuochi differenti che possono farsi.

Resultato: 28443124054800.

134. In un albergo de' più frequentati di Vienna una brigata di 12 persone fece la proposta di non pagare il proprio scotto fino a tanto che la brigata non vi avesse pranzato altrettante volte in un ordine di posti sempre differente. Il padrone dell'albergo, senza molto riflettere, accettò la proposta; e solameute in capo ad alcuni giorni si accorse che nessuno degli avventori abituali avrebbe potuto vivere tanto da giungere al giorno del pagamento. Quindi si trovò nella necessità di do-

versi sbrigare al più presto di que' suoi ospiti quasi sempiterni.

Calcolate il numero dei pranzi, ed il tempo che sarebbe stato necessario per darli, onde operare a mensa un cambiamento generale dei posti occupati da ciascuna persona.

Resultato: Pranzi 479001600; anni 1312333, 1 mese e 24 giorni, prendendo per divisore 365.

Frazioni continue.

231. Si dicono *Frazioni continue* quell'espressioni il cui denominatore si compone d'un numero intero più una frazione, la quale pure ha per denominatore un intero più una frazione, e così di seguito.

Ogni frazione ordinaria può dar luogo ad una frazione continua; basta che sopra i suoi termini si eseguisca l'operazione stessa colla quale si viene a scuoprire il loro massimo comun divisore, e che i quozienti di mano in mano ottenuti, si pongano a denominatori di tante frazioni parziali aventi per numeratore l'unità: il che esige che la generatrice sia irriducibile.

Avendosi, per esempio, la frazione ordinaria irriducibile (e se tale non fosse la renderemmo)

$$\frac{53}{248};$$

se si dà luogo alla ricerca del massimo comun divisore de' suoi termini (che necessariamente è l'unità), si ottiene

248	53	36	17	2	1	0.
	4	1	2	8	2	

Da questo prospetto apparisce che

$$\frac{248}{53}=4+\frac{36}{53};\quad \frac{53}{36}=1+\frac{17}{36};$$

$$\frac{36}{17}=2+\frac{2}{17};\quad \frac{17}{2}=8+\frac{1}{2};$$

per conseguenza, dividendo i termini della frazione proposta per 53, avremo:

$$\frac{53}{248}=\frac{1}{4+\frac{36}{53}};$$

ma la frazione $\frac{36}{53}$, dividendo i suoi due termini per 36, diviene

$$\frac{1}{1+\frac{17}{36}};$$

dunque sostituendo questo valore nell'uguaglianza precedente, si ha

$$\frac{53}{248}=\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{17}{36}}};$$

d'altronde

$$\frac{17}{36}=\frac{1}{2+\frac{2}{17}};$$

dunque

$$\frac{53}{248}=\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{2}{17}}}};$$

ma

$$\frac{2}{17}=\frac{1}{8+\frac{1}{2}};$$

dunque si ha finalmente

$$\frac{53}{248}=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{2}}}}},$$

cioè la frazione ordinaria proposta è ridotta a frazione continua.

232. Da quanto abbiam detto risulta che la forma generale delle frazioni continue è la seguente:

$$a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3 \quad \text{ecc.}}}}$$

233. Per calcolare questa sorta di frazioni è necessario osservare i valori delle espressioni

$$a; \qquad a+\frac{1}{a_1}; \qquad +a\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2}};$$

$$a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3 \quad \text{ecc.}}}}$$

che si chiamano le *ridotte*, e che si deducono l' una dall' altra sostituendo

nella 1.ª $a+\frac{1}{a_1}$ in luogo di a;

nella 2.ª $a_1+\frac{1}{a_2}$ in luogo di a_1;

nella 3.ª $a_2+\frac{1}{a_3}$ in luogo di a_2; ecc.,

per ottenere dalla prima la seconda, da questa la terza, da questa la quarta, e così via di seguito.

Questa successiva sostituzione torna utile alla ricerca dei rispettivi valori delle ridotte.

Infatti, dopo avere osservato che la prima ridotta

può farsi uguale ad $\frac{a}{1}$

e la seconda ad

$$\frac{aa_1+1}{a_1},$$

è facile vedere che la terza ridotta ha per valore

$$\frac{a\left(a_1+\frac{1}{a_2}\right)+1}{a_1+\frac{1}{a_2}}=\frac{a(a_1a_2+1)+a_2}{a_1a_2+1}=\frac{aa_1a_2+a+a_2}{a_1a_2+1}$$

$$=\frac{(aa_1+1)a_2+a}{a_1a_2+1};$$

dal che si rileva che *il valore della terza ridotta si può ricavare da quello della seconda moltiplicando ambo i termini per* a_2, *e aggiungendo poi al numeratore il numeratore della prima e al denominatore il denominatore della prima.*

Abbiamo già detto che la quarta ridotta si deduce dalla terza ponendo $a_2+\frac{2}{a_3}$ invece di a_2.

Perciò il valore della quarta ridotta sarà

$$\frac{aa_1\left(a_2+\frac{1}{a_3}\right)+a+a_2+\frac{1}{a_3}}{a_1\left(a^2+\frac{1}{a_3}\right)+1}$$

$$=\frac{aa_1(a_2a_3+1)+aa_3+a_2a_3+1}{a_1(a_2a_3+1)+a_3}$$

$$=\frac{aa_1a_2a_3+aa_1+aa_3+a_2a_3+1}{a_1a_2a_3+a_1+a_3}.$$

$$=\frac{(aa_1a_2+a+a_2)a_3+aa_1+1}{(a_1a_2+1)a_3+a_1};$$

donde si vede che *il valore della quarta ridotta si può ricavare da quello della terza moltiplicando ambo i termini per* a_3, *ed aggiungendo poi al numeratore il numeratore della seconda, e al denominatore il denominatore della seconda.*

234. Del resto, è cosa ben facile il dimostrare che questa regola è generale.

Infatti, se si rappresentano le ridotte con

$$\frac{P}{P'};\quad \frac{P_1}{Q_1};\quad \frac{P_2}{Q_2}\cdots\cdots\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}};\quad \frac{P_n}{Q_n}\cdots\cdots,$$

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}=\frac{P_{n-2}a_{n-1}+P_{n-3}}{Q_{n-2}a_{n-1}+Q_{n-3}};\quad \frac{P_n}{Q_n}=\frac{P_{n-1}a_n+P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n+Q_{n-2}},$$

e si prova che dalla $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ si ricava la $\frac{P_n}{Q_n}$ ponendo invece di a_{n-1} l'espressione $a_{n-1}+\frac{1}{a_n}$, avremo allora

dimostrato che si può ricavare la $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$ dalla $\frac{P_n}{Q_n}$, e così di seguito.

Nel valore della $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ si ponga adunque $a_{n-1}+\frac{1}{a_n}$ in luogo di a_{n-1}; allora avremo

$$\frac{P_{n-2}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)+P_{n-3}}{Q_{n-2}\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_n}\right)+Q_{n-3}}$$

$$=\frac{P_{n-2}(a_{n-1}a_n+1)+P_{n-3}a_n}{Q_{n-2}(a_{n-1}a_n+1)+Q_{n-3}a_n}$$

$$=\frac{(P_{n-2}a_{n-1}+P_{n-3})a_n+P_{n-2}}{(Q_{n-2}a_{n-1}+Q_{n-3})a_n+Q_{n-2}}$$

$$=\frac{P_{n-1}a_n+P_{n-2}}{Q_{n-1}a_n+Q_{n-2}}=\frac{P_n}{Q_n},$$

come si voleva dimostrare.

235. Ciò posto, conviene osservare che i valori delle successive ridotte offrono valori approssimativi della frazione ordinaria che ha dato origine alla frazione continua; e che anzi questi valori tanto più si approssimano *per eccesso* o *per difetto* al vero valore di detta frazione ordinaria, quante più sono le ridotte che si considerano.

Torniamo all'esempio precedentemente stabilito.

Le ridotte in che si può decomporre la frazione continua, cui dà origine la frazione ordinaria $\frac{53}{248}$, sono

$$\frac{1}{4};\quad \frac{1}{4+\frac{1}{1}};\quad \frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}};\quad \frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{8}}}};$$

$$\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{8+\frac{1}{2}}}}}$$

la seconda di esse è manifestamente uguale a $\frac{1}{5}$.

E secondo la regola già dimostrata, i rispettivi valori delle altre tre sono

$$\frac{1\times2+1}{5\times2+4}=\frac{3}{14};\quad \frac{3\times8+1}{14\times8+5}=\frac{25}{117};\quad \frac{25\times2+3}{117\times2+14}=\frac{53}{248}.$$

Queste frazioni

$$\frac{1}{4},\quad \frac{1}{5},\quad \frac{3}{14},\quad \frac{25}{117},\quad \frac{53}{248}$$

sono di mano in mano più prossime al valore della frazione data $\frac{53}{248}$; anzi si può dimostrare che queste frazioni sono alternativamente maggiori e minori di essa, in guisa che il suo valore si trova sempre compreso fra i valori di due frazioni consecutive, cioè tra la prima e la seconda, tra la seconda e la terza, e così di seguito.

Infatti, la prima $\frac{1}{4}$ è maggiore di $\frac{53}{248}$ per la ra-

gione che

$$\frac{53}{248}=\frac{1}{4+\frac{36}{53}},$$

donde si vede che omettendo la quantità $\frac{36}{53}$ da aggiungersi al denominatore, il valore della frazione cresce; ma se dalla frazione

$$\frac{36}{53}=\frac{1}{1+\frac{17}{36}}$$

non si prende che il termine $\frac{1}{1}$, si ha una quantità maggiore di $\frac{36}{53}$, e quindi in

$$\frac{1}{4+\frac{1}{1}}=\frac{1}{5}$$

abbiamo una quantità minore della frazione proposta. Nell'istessa maniera si prova che $\frac{3}{14}$ la superano, e che $\frac{25}{117}$ ne son minori.

236. Dunque si può concludere che *la frazione continua dà un valore approssimativo della frazione ordinaria da cui è stata desunta, per eccesso, o per difetto, secondochè ci arrestiamo ad una ridotta (od anche ad un denominatare della frazione continua) di posto dispari o di posto pari.*

237. È evidente poi che trattandosi di una frazione

continua finita, il valore dell'ultima ridotta corrisponde a quello della sua generatrice.

Ecco alcuni esempi di frazioni continue finite:

238. Problema. — *Valutare approssimativamente il rapporto della circonferenza al diametro in frazione continua.*

È noto che questo rapporto, espresso in decimali, ha per valore

$$3{,}14159\ldots\ldots, \quad \text{o} \quad \frac{314159}{100000},$$

a meno d'un centomillesimo.

Si troverà subito pel valore di questo numero in frazione continua

$$\frac{314519}{100000},\ \text{o}\ x=3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{25+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}}}}}}$$

il che dà per le ridotte consecutive

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{9208}{2931},\ \frac{9563}{3044},\ \frac{76149}{24239},\ \frac{314159}{100000}.$$

Prendendo $\frac{22}{7}$ pel valore del numero proposto; si commetterebbe un errore minore di

$$\frac{1}{7(7+1)}\ \text{o}\ \frac{1}{56};$$

ma questa ridotta dà ancora un grado d'approssimazione più considerevole: perchè, essendo il numero compreso fra

$$\frac{22}{7}\ \text{e}\ \frac{333}{106},$$

ne segue che $\frac{22}{7}$ differisce da questo numero di una quantità minore di

$$\frac{22}{7}-\frac{333}{106},\ \text{o}\ \frac{1}{742};$$

così l'errore commesso è molto minore d'$\frac{1}{100}$. E $\frac{22}{7}$,

o $3\frac{1}{7}$, è frequentemente usato per esprimere il rapporto della circonferenza al diametro, rapporto trovato da Archimede.

La quarta ridotta, $\frac{355}{113}$, dà un valore, trovato da Mezio, molto più approssimato; perchè il numero proposto essendo compreso fra

$$\frac{355}{113} \text{ e } \frac{9208}{2931},$$

la differenza fra questo numero e $\frac{355}{113}$ è minore di

$$\frac{1}{113\times2931},$$

frazione evidentemente minore di 0,00001.

Le ridotte successive sono troppo complicate, per essere sostituite con vantaggio al numero proposto.

ESERCIZI.

LXXXVII. Sviluppare in frazioni continue le espressioni seguenti:

$$\frac{351}{965};\quad \frac{251}{764};\quad \frac{1769}{5537};\quad \frac{587}{1943}.$$

Resultato: — Valori approssimativi

della 1.ª $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11};$

della 2.ª $\frac{1}{3}, \frac{22}{67}, \frac{23}{70}, \frac{114}{347};$

della 3.ª $\frac{1}{3}, \frac{7}{22}, \frac{8}{25}, \frac{23}{72}, \frac{100}{313}, \frac{325}{1637}, \frac{625}{1950};$

della 4.ª $\frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{13}{43}, \frac{29}{96}, \frac{100}{331}, \frac{129}{427}, \frac{229}{758}.$

LXXXVIII. Trovare valori approssimati della radice quadrata del numero 10 espressi da frazioni più semplici possibili.

Resultato: $\frac{3}{1}, \frac{19}{6}, \frac{117}{37}, \frac{721}{228}, \frac{4443}{1405}, \ldots\ldots$

Equazioni esponenziali.

239. Chiamasi *equazione esponenziale* ogni equazione avente la forma

$$a^x = b,$$

nella quale a e b sono quantità positive date, ed x è l'incognita che deve verificare l'uguaglianza.

Sappiamo già che cosa significhi l'espressione a^x (n.º 59); ora aggiungeremo che se x è commensurabile, l'espressione a^x non presenta difficoltà a comprendersi; se $x = \frac{m}{n}$, ed m e n sono numeri interi, abbiamo

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Noi supporremo sempre che a sia positiva, e non considereremo che i valori reali e positivi del radicale.

Se x ha un valore commensurabile $-m$, a^x è definito (n.º 33) dall' equazione

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Rimane dunque soltanto da definirsi a^x per i valori incommensurabili positivi o negativi d' x; premetteremo pertanto alcune proposizioni.

1.ª *Tutte le potenze, positive o negative, d' un numero positivo sono positive.*

Ciò è evidente, perchè non consideriamo che i valori positivi dei radicali.

2.ª *Tutte le potenze positive dei numeri maggiori dell' unità sono maggiori dell' unità, e tutte le potenze negative sono minori dell' unità. È l' opposto per le potenze dei numeri minori dell'unità.*

Infatti, rappresentiamo con a un numero maggiore di 1, e con $a^{\frac{m}{n}}$ una potenza positiva di a; abbiamo (n.º 94):

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m};$$

ora, essendo $a>1$, anche $a^m>1$, e per conseguenza $\sqrt[n]{a^m}>1$. Poichè le potenze positive di a sono maggiori dell' unità, l' uguaglianza

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

dimostra che le potenze negative sono minori dell' unità, giacchè a^{-m} è un numero intero e $\frac{1}{a^m}$ è una frazione.

Supposto poi che sia $a<1$, potremo porre $a=\frac{1}{a'}$, e sarà $a'>1$; dunque

$$a^x = \frac{1}{a'^x};$$

ed è evidente che i valori d' x, per i quali $a'^x>1$, rendono $a^x<1$, e reciprocamente.

3.ª *Se* x *acquista valori commensurabili crescenti, l'espressione* a^x *varia sempre nello stesso senso, cioè aumenta se* $a>1$, *e diminuisce se* $a<1$.

Infatti, sieno p e q due valori commensurabili, positivi o negativi, attibuiti successivamente ad x; abbiamo (n.º 34):

$$\frac{a^q}{a^p}=a^{q-p};$$

ora, $q-p$ è positivo, perchè per ipotesi $q>p$.

Dunque se $a>1$, anche (n.º 239-2.ª) $a^{q-p}>1$, e per conseguenza $a^q>a^p$.

Se poi $a<1$, anche $a^{q-p}<1$, e per conseguenza $a^q<a^p$.

Dunque, nel primo caso a^x aumenta quando x passa dal valore p al valore q, e nel secondo diminuisce.

4.ª *Si possono attribuire ad* x *valori commensurabili, così poco differenti fra loro, che* a^x *vari tanto poco quanto si voglia.*

Sia m un valore commensurabile qualunque d' x; bisogna provare che si può aumentare m di una quantità k tanto piccola, che la differenza $a^{m+k}-a^m$ sia piccola quanto si voglia.

Abbiamo:

$$a^{m+k}=a^m\times a^k,$$

e quindi

$$a^{m+k}-a^m=a^m(a^k-1);$$

ora a^m è indipendente da k; dunque sarà sufficiente provare che a^k-1 può essere reso piccolo quanto si voglia da valori abbastanza piccoli di k.

Supponiamo primieramente $a > 1$.

Qualunque sia il valore positivo di a, a^k sarà sempre maggiore dell' unità (n.º 239-2.ª).

Per provare che vi si approssima quanto si voglia, basterà dimostrare che può divenire minore di qualunque numero $1+h$ maggiore dell' unità, cioè che si può scegliere k tale che sia

$$a^k < 1 + h,$$

ove h è piccolo quanto si voglia.

Poniamo $k = \frac{1}{b}$, la disuguaglianza precedente diviene

$$a^{\frac{1}{b}} < 1 + h,$$

ovvero

$$(1 + h)^b > a.$$

Ora, un numero $1 + h$ maggiore di uno, può sempre innalzarsi ad una potenza tanto grande che il resultato superi un numero dato a; infatti, ponendo $1 + h = d$, abbiamo

$$\begin{aligned} &d - 1 = h, \\ &d^2 - d = hd > h, \\ &d^3 - d^2 = hd^2 > h, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &d^b - d^{b-1} = hd^{b-1} > h; \end{aligned}$$

sommando queste disuguaglianze, e sopprimendo i termini che si distruggono nel primo membro, avremo:

$$d^b - 1 > bh,$$

onde, sostituendo a d il suo valore $1+h$, si ha

$$(1+h)^b > 1 + bh;$$

ora bh potendo pei valori di b divenire grande quanto si voglia, e potendo rendere per conseguenza $1+bh>a$, la preposizione è dimostrata.

Se $a<1$, si rappresenterà con $\frac{1}{a'}$, e sarà $a'>1$; onde $a^k=\frac{1}{a'k}$, ma per ciò che abbiamo dimostrato, a'^k può differire tanto poco quanto si voglia dall' unità; dunque avverrà lo stesso di $\frac{1}{a'^k}$, cioè di a^k.

5.ª *Una espressione la cui proprietà si è di variare di tanto poco quanto si voglia, per aumenti sufficientemente piccoli dati a una variabile* x, *che essa contiene, dicesi* funzione continua d' x, *ed è chiaro che se, per due valori* m *ed* n *d'*x, *essa prende due dati valori, potrà anche per un valore conveniente d'*x, *compreso fra* m *ed* n, *prenderne uno qualunque intermedio*. Ammesso questa definizione potremo dire che a^x è *funzione continua d'* x.

240. Le precedenti osservazioni ci fanno definire a^x nel modo seguente:

a^x rappresenta, per un valore incommensurabile h attribuito ad x, un numero compreso fra i valori a^x, che corrispondono agli esponenti commensurabili minori di h, e quelli chê corrispondono agli esponenti maggiori di h.

Risoluzione dell'equazione $a^x=b$.

241. Quando a e b sono numeri interi e positivi, l' equazione $a^x=b$ ha sempre una soluzione ed una sola.

Per dimostrare ciò, distingueremo due casi:

1.° Sia $a>1$. Si è già veduto (n.° 239-4.ª) che si può sempre trovare un valore tanto grande per x che a^x superi qualunque grandezza data; ma se $x=0$, $a^x=1$, dunque essendo a^x funzione continua d'x, esisterà sempre (n.° 239-5.ª) un valore d'x maggiore di *zero*, onde a^x prenda un valore qualunque compreso fra 1 e una quantità grande quanto si voglia, o, come suol dirsi, compreso fra $+1$ e $+\infty$.

Dando ad x valori negativi, per esempio, facendo $x=-m$, avremo

$$a^x=\frac{1}{a^m},$$

ed m variando da 0 a $+\infty$ il denominatore del secondo membro prende tutti i valori possibili maggiori di 1, e per conseguenza la frazione prende essa pure tutti i valori possibili maggiori di 1.

Inoltre a^x non può prendere due volte lo stesso valore, perchè se avessimo $a^x=a^{x'}$, se ne dedurrebbe $1=\frac{a^x}{a^{x'}}=a^{x-x'}$. Ora, la potenza 0 di un numero maggiore di 1 è evidentemente la sola che sia eguale all'unità; per conseguenza si dovrebbe avere

$$x=x'.$$

2.° Sia $a<1$. Poniamo $a=\frac{1}{a'}$; sarà $a'>1$, e

$$a^x=\frac{1}{a'^x},$$

e per ciò che abbiamo dimostrato, mentre x varia da 0 a $+\infty$, a'^x prende tutti i valori possibili maggiori di 1; dunque a^x prenderà tutti i valori compresi fra

0 e 1. Variando x da 0 a $-\infty$, a'^x prende tutti i i valori possibili minori di 1, e per conseguenza a^x prenderà tutti i valori maggiori dell' unità. Dunque anche in questo caso, a^x può prendere un valore positivo qualunque.

212. Ciò posto supponiamo in primo luogo che nella equazione

$$a^x = b,$$

a e b sieno maggiori di 1. Diamo ad x i valori successivi 0, 1, 2, 3, 4, 5 ....., sinchè si trovino due numeri consecutivi m ed $m+1$ tali, che le potenze a^m ed a^{m+1} comprendano fra loro il numero b; il valore d'x sarà evidentemente compreso fra m ed $m+1$; poniamo $x = m + \frac{1}{y}$, e sostituiamo questo valore nell' equazione proposta; avremo:

$$a^{m+\frac{1}{y}} = b, \quad \text{o} \quad a^m \times a^{\frac{1}{y}} = b,$$

da cui

$$a^{\frac{1}{y}} = \frac{b}{a^m};$$

e inalzando i due membri alla potenza y, si ottiene

$$a = \left(\frac{b}{a^m}\right)^y;$$

ovvero, ponendo per semplicità $\frac{b}{a^m} = c$, si ha

$$c^y = a;$$

equazione che ha la stessa forma della proposta.

Diamo anche ad y i valori successivi 0, 1, 2, 3, 4, 5.....,

sinchè si trovino due potenze consecutive di c, c^n e c^{n+1} fra le quali sia compreso a; allora y sarà compreso fra i due numeri n ed $n+1$; quindi ponendo $y=n+\frac{1}{z}$, z sarà determinata da un' equazione che riducesi facilmente alla forma

$$d^z=c, \quad \text{essendo} \quad d=\frac{a}{c^n}.$$

Operando su questa equàzione come sulle precedenti, troveremo due numeri interi consecutivi p e $p+1$, che comprenderanno il valore di z. Ponendo $z=p+\frac{1}{u}$ formeremo un' altra equazione che determinerà u; e così di seguito. Le equazioni

$$x=m+\frac{1}{y}, \quad y=n+\frac{1}{z}, \quad z=p+\frac{1}{u}$$

dànno il valore d'x sotto la forma d' una frazione continua

$$x=m+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{p+\text{ecc.}}}$$

Formando le ridotte, avremo una serie di valori approssimati d' x aventi la forma più semplice possibile, avuto riguardo al grado d' approssimazione che dànno; e proseguendo convenientemente le operazioni, potremo calcolare il valore d' x col grado d' approssimazione che si vuole.

Esempio 1.⁰ — Risolvere l' equazione $2^x=7$.

Essendo 7 compreso fra 2^2 ossia 4, e 2^3 ossia 8, porremo

$$x=2+\frac{1}{y};$$

onde si deduce

$$\left(\frac{7}{4}\right)^y = 2.$$

Essendo 2 compreso fra $\frac{7}{4}$ e $\left(\frac{7}{4}\right)^2$ ossia $\frac{49}{16}$, porremo

$$y = 1 + \frac{1}{z},$$

onde

$$\left(\frac{8}{7}\right)^z = \frac{7}{4}.$$

Essendo $\frac{7}{4}$ compreso fra $\left(\frac{8}{7}\right)^4$ ossia $\frac{4096}{2401}$ e $\left(\frac{8}{7}\right)^6$ ossia $\frac{32768}{16807}$, porremo

$$z = 4 + \frac{1}{u},$$

onde

$$\left(\frac{16807}{16304}\right)^u = \frac{8}{7},$$

e potremo così trovare la parte intera di u in modo analogo.

Limitando l' operazione a questo punto, abbiamo

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{u}}};$$

e per le prime ridotte 2, 3, $\frac{14}{5}$; dunque si può prendere $\frac{14}{5}$ per valore approssimato d' x.

Se a e b non sono ambedue maggiori di 1, è facile trasformare l'equazione

$$(1) \qquad a^x = b$$

in un'altra che soddisfi a questa condizione.

Infatti, siano $a > 1$, $b < 1$; risolveremo l'equazione

$$a^x = \frac{1}{b},$$

e per soddisfare alla (1), basterà prendere, col segno —, il valore positivo trovato per x.

Sieno $a < 1$, $b > 1$; risolveremo l'equazione

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = b,$$

e il valore d'x preso col segno —, soddisfarà alla (1).

Finalmente, sieno $a < 1$, $b < 1$; risolveremo

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{b},$$

che evidentemente equivale all'equazione (1).

Esempio 2.° — Risolvere l'equazione $3^x = 15$.

Essendo 15 compreso fra 3^2 e 3^3, porremo.

$$x = 2 + \frac{1}{y};$$

onde

$$\left(\frac{5}{3}\right)^y = 3.$$

Dando ad y i valori successivi 1, 2, 3, si trova

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2 < 3 \quad \text{e} \quad \left(\frac{5}{3}\right)^3 > 3;$$

dunque y è compreso fra 2 e 3. Ponendo $y = 2 + \frac{1}{z}$

si ottiene

$$\left(\frac{27}{25}\right)^z = \frac{5}{3}.$$

Facendo le potenze successive d'y, si trova che z è compreso fra 6 e 7.

Limitando l'operazione a questo punto, si ha

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \text{ecc.}}}$$

Le prime ridotte del valore d'x sono dunque 2, $\frac{5}{2}$, $\frac{32}{13}$; e prendendo $\frac{33}{13}$ per valore approssimato d'x, si commette un errore minore di $\frac{1}{169}$.

ESERCIZI.

LXXXIX. Risolvere le seguenti equazioni:

$5^x = 7.$ Resultato: $1,\ \frac{5}{4},\ \frac{6}{5} \ldots$

$10^x = 5.$ R. $1,\ \frac{2}{3},\ \frac{7}{10} \ldots$

$3^x = 177147.$ R. $x = 11.$

$\left(\frac{3}{4}\right)^x = 51\frac{1}{2}.$ R. $x = -13{,}701172\ldots$

Generalità sulle proporzioni.

Definizioni.

243. *Ragione* di due grandezze omogenee non è altro che la scambievole relazione che fra esse esiste in ordine alla loro quantità.

Ora, poichè il confronto fra due grandezze della stessa specie, non si può istituire che per sottrazione o per divisione, ne consegue che la loro ragione dicesi *per differenza* se deriva dalla sottrazione, cioè se rappresenta l'eccesso dell' una grandezza sull' altra: *per quoziente* se nasce dalla divisione, vale a dire se significhi quante volte l' una grandezza contien l'altra.

Allorchè si tratta di grandezze numeriche, la loro ragione per quoziente chiamasi *rapporto*.

Il rapporto di un numero ad un altro numero è *diretto* od *inverso* secondochè rappresenta il resultato della divisione del primo pel secondo, o di questo per quello. Ciò è quanto dire che due numeri ammettono due rapporti espressi da due frazioni aventi i medesimi termini collocati in ordine inverso, come, p. e.

$$\frac{a}{b} \text{ e } \frac{b}{a},$$

il cui prodotto è l' unità.

Evidentemente un rapporto diventa inverso ponendo i suoi termini a divisori dell' unità.

244. Il prodotto di due o più rapporti semplici è detto *rapporto composto;* tale sarebbe

$$\frac{abcd}{mnpq}$$

formato del prodotto dei rapporti semplici

$$\frac{a}{m}, \frac{b}{n}, \frac{c}{p}, \frac{d}{q}.$$

245. Un rapporto gode di tutte le proprietà che appartengono alla frazione; per convincersene basta riflettere che *frazione* e *rapporto* sono due diverse forme d'una stessa operazione fatta sopra due numeri.

Il primo termine d'un rapporto chiamasi *antecedente;* il secondo *conseguente.*

Se i termini d'un rapporto sono frazioni o numeri frazionari, avvi il mezzo di renderli interi, e questo consiste nel moltiplicare l'antecedente ed il conseguente pel prodotto dei denominatori. — Per esempio, il rapporto del numero $\frac{a}{b}$ all'altro $\frac{c}{d}$ si chiama nel rapporto de' due numeri interi ad e bc.

246. Ogni volta che il rapporto di due numeri è uguale a quello di due altri, si usa dire che i quattro numeri *sono in proporzione;* oppure che *il primo numero sta al secondo come il terzo al quarto.*

Quindi se il rapporto dei due numeri a e b uguaglia quello di due altri numeri c e d si avrà fra essi una proporzione che si pronunzia:
come il numero a *sta al numero* b *così il numero* c *sta al numero* d;
e che sempre si scrive in una delle due maniere seguenti:

$$a:b::c:d$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

La proporzione ha due antecedenti, che sono il 1.°

ed il 3.° termine; e due conseguenti, che sono il 2.° ed il 4.° Oltre a ciò, in essa il 1.° ed il 4.° termine son detti *estremi;* il 2.° ed il 3.° *medî.* — Se i medî sono uguali, la proporzione dicesi *continua;* ed in tal caso il secondo numero è chiamato *medio proporzionale per quoziente fra gli estremi.*

Proporzione continua sarebbe la seguente

$$m : n :: n : p,$$

che talvolta scrivesi

$$\div\!\div m : n : p;$$

il numero n è *medio proporzionale per quoziente* fra m e p.

Proprietà delle proporzioni.

247. Teorema 1.° — *In ogni proporzione il prodotto degli estremi è uguale al prodotto dei medî.*

Infatti, prendasi qualsivoglia proporzione

$$a : b :: c : d,$$

e mettasi sotto l'altra forma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Se or si moltiplichi ciascun rapporto pel prodotto dei conseguenti (in questo caso bd), troveremo

$$ad = bc,$$

come dovevasi dimostrare.

Se la proporzione è continua, il quadrato del medio

uguaglia il prodotto degli estremi; il perchè il medio rappresenta la radice quadrata del prodotto degli estremi. Da ciò la regola per cercare il medio proporzionale per quoziente fra due numeri.

248. Teorema 2.° — Reciprocamente: *se quattro numeri* p, q, r, s *sien tali che il prodotto* ps *degli estremi uguagli il prodotto* qr *dei medi, è necessario che essi sieno in proporzione.*

Infatti, dividendo questi prodotti dati uguali pel secondo numero moltiplicato pel quarto, avremo:

$$\frac{ps}{qs}=\frac{qr}{qs}; \quad \text{ovvero} \quad \frac{p}{q}=\frac{r}{s}.$$

249. Corollario 1.° — Da questa proprietà si rileva che *di due prodotti uguali può sempre formarsi una proporzione, purchè dei fattori dell'uno se ne facciano i medi e dei fattori dell'altro gli estremi.*

250. Corollario 2.° — Dalla proprietà fondamentale (n.° 247) si ricava ancora che *se d'una proporzione non si conosca un termine, questo si può sempre scuoprire dividendo il prodotto dei medi per l'estremo cognito, qualor vi manchi l'altro estremo, e dividendo il prodotto degli estremi pel medio conosciuto, se manchi l'altro medio.*

Infatti, se abbiasi la proporzione

$$a : b :: c : x,$$

nella quale x rappresenta l'incognita, la proprietà fondamentale ci darà

$$ax=bc; \quad \text{da cui} \quad x=\frac{bc}{a}.$$

E se avessimo

$$m : x :: n : p,$$

per l'istesso principio avremmo

$$mp = nx; \quad \text{donde} \quad \frac{mp}{n} = x;$$

risultati che fan rilevare l'esattezza della surriferita regola.

251. Corollario 3.° — *Quando fra quattro numeri vi ha proporzione, questa può scriversi in otto maniere, le quali però riduconsi a quattro; e ciò alternando o permutando* (cioè cambiando di posto i medî o gli estremi); *oppure invertendo* (vale a dire ponendo i medi nel posto degli estremi, e viceversa).

Per esempio, stando il numero m al numero n come il numero p al numero q, si avrà

1.	$m : n :: p : q$
2.	$m : p :: n : q$ (alternando)
3.	$n : m :: q : p$ (invertendo)
4.	$n : q :: m : p$
5.	$p : m :: q : n$
6.	$p : q :: m : n$
7.	$q : n :: p : m$
8.	$q : p :: n : m.$

Che queste proporzioni si riducano a quattro ben si rileva dalla semplice ispezione del prospetto; e che tutte sieno vere lo prova l'uguaglianza costante fra il prodotto dei medî e quello degli estremi.

252. Teorema 3.° — *In qualunque proporzione come la somma o la differenza dei due primi termini sta al secondo, così la somma o la differenza dei due ultimi sta al quarto.*

Infatti, data la proporzione

$$a : b :: c : d,$$

se si aggiunge a ciascun rapporto la quantità $\pm m$, otterremo

$$\frac{a}{b} \pm m = \frac{c}{d} \pm m,$$

da cui

$$\frac{a \pm bm}{b} = \frac{c \pm dm}{d};$$

e facendo $m = 1$, verrà

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d},$$

come dovevasi dimostrare.

Avvertasi che la prima parte di questa proprietà è richiamata dalla parola *componendo;* l'altra della parola *dividendo.*

253. Corollario 1.° — Alternando per i medî nella proporzione

$$a : b :: c : d,$$

si ha

$$a : c :: b : d;$$

da cui, per la proprietà precedente:

$$a \pm c : c :: b \pm d : d;$$

ossia

$$a \pm c : b \pm d :: c : d;$$

la quale disgiunta dal doppio segno, diviene

$$a + c : b + d :: c : d,$$
$$a - c : b - d :: c : d;$$

e per conseguenza:

$$a + c : b + d :: a - c : b - d;$$
$$a + c : a - c :: b + d : b - d;$$

il tutto riportato alla prima proporzione, ci fa concludere:

1.° *Che in ogni proporzione come la somma o la differenza degli antecedenti sta alla somma o alla differenza dei conseguenti, così un antecedente sta al suo conseguente;*

2.° *Che la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come la differenza degli uni sta alla differenza degli altri;*

3.° *Che la somma degli antecedenti sta alla loro differenza, come la somma dei conseguenti alla lor differenza.*

254. Teorema 4.° — *In una serie qualunque di rapporti uguali la somma degli antecedenti sta a quella dei conseguenti, come uno degli antecedenti sta al suo conseguente.*

Abbiasi

$$a : b :: c : d :: e : f :: g : h :: i : k;$$

se poniamo:

$$\frac{a}{b} = q; \quad \text{e perciò} \quad a = bq,$$

$$\frac{c}{d} = q; \quad \ldots\ldots \quad c = dq,$$

$$\frac{e}{f} = q; \quad \ldots\ldots \quad c = fq,$$

$$\frac{g}{h} = q; \quad \ldots\ldots \quad g = hq,$$

$$\frac{i}{k} = q; \quad \ldots\ldots \quad i = kq,$$

e poi sommiamo queste equazioni, trovasi

$$a + c + e + g + i = bq + dq + fq + hq + kq$$
$$= q(b + d + f + h + k);$$

da cui

$$\frac{a+c+e+g+i}{b+d+f+h+k}=q=\frac{a}{b},$$

il che volevasi dimostrare.

253. Teorema 5.° — *Due proporzioni moltiplicate o divise termine a termine dànno prodotti o quozienti che pur sono in proporzione.*

Abbiansi le due proporzioni

$$a:b::c:d,$$
$$e:f::g:h,$$

e poniamole sotto l'altra forma

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

$$\frac{e}{f}=\frac{g}{h};$$

per un assioma noto si avrà

$$\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}=\frac{c}{d}\times\frac{g}{h};$$

cioè

$$\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh};$$

ovvero

$$ae:bf::cg:dh,$$

il che prova la prima parte del teorema.

Se poi nelle proporzioni date si uguaglia il prodotto de' medi a quello degli estremi, avremo

$$ad=bc$$
$$eh=fg,$$

donde

$$\frac{ad}{eh}=\frac{bc}{fg};$$

oppure i due prodotti uguali

$$\frac{a}{e} \times \frac{d}{h} = \frac{b}{f} \times \frac{c}{g};$$

da cui pel Teorema 2.°

$$\frac{a}{e} : \frac{b}{f} :: \frac{c}{g} : \frac{d}{h},$$

il che dimostra la seconda parte del teorema.

256. Corollario. — Segue da ciò che quando quattro numeri sono in proporzione, anche le loro potenze, e le loro radici d'uno stesso grado debbono essere proporzionali.

257. Teorema 6.° — *Quando due proporzioni hanno gli stessi estremi, i loro medî formano una proporzione.*

Infatti, le due proporzioni

$$a : b :: c : d,$$
$$a : m :: n : d,$$

dànno (Teorema 1.°)

$$ad = bc,$$
$$ad = mn;$$

quindi

$$bc = mn; \quad \text{e perciò} \quad b : m :: n : c.$$

Si osservi che i loro primi due medî vengono ad essere inversamente proporzionali ai due secondi.

Dicasi lo stesso di due proporzioni che avessero i medesimi medî.

258. Teorema 7.° — *Se due proporzioni hanno i medesimi antecedenti, i loro conseguenti formano una proporzione, e viceversa.*

Infatti, avendosi

$$a : b :: c : d,$$
$$a : f :: c : g,$$

alternando per i medî, troveremo

$$a : c :: b : d,$$
$$a : c :: f : g;$$

e poichè due rapporti uguali ad un medesimo rapporto conviene che sieno uguali fra loro, ne conseguirà

$$b : d :: f : g;$$

cioè una proporzione fra i conseguenti, come volevasi provare.

E se invece si avesse

$$m : n :: p : q,$$
$$a : n :: c : q,$$

ne dedurremo per lo stesso principio

$$m : p :: a : c,$$

cioè una proporzione fra gli antecedenti.

259. Noteremo per ultimo che sopra i termini di una proporzione possono farsi tutte quelle operazioni che si potrebbero fare sopra i termini di due frazioni uguali, quando non se ne volesse distruggere l'uguaglianza.

Delle equidifferenze

Definizioni.

260. Chiamasi *Equidifferenza* l'uguaglianza di due ragioni per differenza: e si distinguono anche in essa

(e nell'istesso modo che nella proporzione) *antecedenti, conseguenti, medî* ed *estremi.*

Quindi se un numero n ecceda un altro numero m di quanto un terzo numero p eccede un quarto numero q, avremo fra queste grandezze numeriche una equidifferenza, la quale scrivesi così

$$n - m = p - q;$$

nè si legge diversamente da quel che indicano i segni.

Qui sarebbero antecedenti i numeri n e p; m e q i conseguenti; m e p i medî; n e q gli estremi.

Se i medî sono uguali, l'equidifferenza è detta *continua;* e ciascuno di essi prende la denominazione di *medio aritmetico* o *per differenza fra i due estremi.*

Tale sarebbe la seguente:

$$a - b = b - c,$$

che talvolta scrivesi

$$\div a \,.\, b \,.\, c;$$

il numero b sarebbe *medio aritmetico*, o *medio per differenza fra* a e c.

Proprietà delle equidifferenze.

261. Teorema 1.° — *In qualunque equidifferenza la somma dei medi uguaglia quella degli estremi.*

Infatti, abbiasi l'equidifferenza

$$a - b = c - d;$$

aggiungendo all'una e all'altra parte la somma dei

conseguenti, otterremo

$$a - b + b + d = c - d + b + d;$$

che equivale ad

$$a + d = c + b,$$

come volevasi dimostrare.

262. Corollario. — L'equidifferenza essendo continua, il doppio del termine medio uguaglierà la somma degli estremi; e perciò il medio sarà uguale alla semi-somma degli estremi.

Esempio. — Avendo

$$m - n = n - p,$$

oppure

$$\div m \,.\, n \,.\, p,$$

bisognerà che sia

$$2n = m + p;$$

e per conseguenza

$$n = \frac{m + p}{2}.$$

Da ciò la regola per trovare il medio per differenza o la media aritmetica fra due numeri dati.

Osserviamo che per analogia si suol chiamare *media aritmetica* di più quantità la loro somma divisa pel loro numero. Quindi la media aritmetica fra i sei numeri a, b, c, d, e, f si ritiene che sia

$$\frac{a + b + c + d + e + f}{6}.$$

263. Teorema 2.° — Reciprocamente: *Se quattro grandezze numeriche son tali che la somma delle medie*

uguagli la somma delle estreme, esse costituiscono un' equidifferenza.

Sieno i numeri

$$p, q, r, s$$

tali che si abbia

$$p + s = q + r;$$

sottraendo dall'una e dall'altra parte il secondo ed il quarto dei numeri dati, avremo

$$p + s - q - s = q + r - q - s;$$

cioè a dire

$$p - q = r - s,$$

come dovevasi dimostrare.

261. Corollario. — Dati tre termini di un' equidifferenza, potremo sempre trovarne il quarto.

Abbiasi, per esempio, l'equidifferenza

$$a - b = c - x;$$

poichè

$$a + x = b + c,$$

togliendo a da ambe le parti, avremo

$$x = b + c - a;$$

e se avessimo

$$a - b = x - c,$$

porremmo

$$b + x = a + c;$$

da cui

$$x = a + c - b.$$

Dunque possiamo concludere che *per avere l'estremo od il medio incognito d'una equidifferenza basta togliere dalla somma dei medi o degli estremi l'estremo od il medio conosciuto.*

ESERCIZI.

XC. Dimostrare che dalla proporzione

$$a : b :: c : d$$

si deduce

$$ab : cd :: (a + b)^2 : (c + d)^2.$$

XCI. Fu domandato ad un tale quanto denaro avesse nella sua borsa, ed egli rispose che aveva un numero di *napoleoni* tale, che l'eccesso di questo numero sopra 7 era uguale all'eccesso del quadruplo dallo stesso numero sopra 52. — Si domanda il numero dei *napoleoni*.

Resultato: Il numero richiesto è 15.

XCII. La somma dei termini di un'equidifferenza è 10, quella dei loro quadrati è 30 e il loro prodotto è 24; trovare questa equidifferenza.

Resultato: $1 . 2 : 3 . 4$.

XCIII. Dimostrare che dalla proporzione

$$ma + nb : ma' + nb' :: a : a'$$

resulta

$$a : a' :: b : b',$$

qualunque sieno i numeri m ed n.

XCIV. Si hanno tre numeri in proporzione continua; il termine medio è 60, e le somma degli altri è 125; trovare gli estremi.

Resultato: Estremi 45 e 80.

XCV. Trovare tre numeri in proporzione continua, e tali che la loro somma sia 19 e la somma dei loro quadrati sia 133.

Resultato: Numeri richiesti: 4, 6, 9.

Teoria delle progressioni

Progressioni per differenza.

265. *Una progressione aritmetica o per differenza* è una serie di termini, di cui ciascuno è uguale al precedente aggiunto ad una quantità costante, che si chiama *ragione*.

Così, nelle uguaglianze

$$a+r=b, \quad b+r=c, \quad c+r=d, \quad d+r=e \ldots\ldots$$

i termini a, b, c, d, e..... formano una progressione per differenza, la cui ragione è r.

266. Si dice che una progressione per differenza è *crescente* o *decrescente*, secondochè i termini che la compongono vanno aumentando o diminuendo; o in altre parole, secondochè la ragione di questa progressione è positiva o negativa.

Le progressioni

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23 \ldots\ldots,$$

$$16,\ 12,\ 8,\ 4,\ 0,\ -4,\ -8,\ -12 \ldots\ldots,$$

sono una crescente e l'altra decrescente; la ragione della prima è

$$5-2=3;$$

quella della seconda è

$$12-16=-4.$$

267. *Un termine qualunque d' una progressione per differenza è uguale alla media aritmetica fra quello che lo precede e quello che lo segue.*

Ed infatti, se f, g, h sono tre numeri consecutivi, presi arbitrariamente in una serie di tal genere, chiamando r la ragione, si ha:

$$f+r=g, \quad g+r=h,$$

e sottraendo la seconda equazione dalla prima,

$$f-g=g-h,$$

da cui per trasposizione si ricava

$$f+h=2g; \quad \text{epperò} \quad g=\frac{f+h}{2}$$

conforme è detto di sopra.

268. Dunque *la progressione per differenza è un seguito di equidifferenze continue in cui tutti i termini, eccetto il primo e l'ultimo, fan l'ufficio di antecedente e conseguente;* ed ecco perchè volendo indicare che più quantità formano una progressione per differenza si separano due a due con un punto, che significa, *sta a;* e si fa precedere la serie da due punti separati da una lineetta orizzontale. — Così, l'espressione

$$\div\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f \,.\, .\, .\, .\, .$$

indica che i termini a, b, c, d, e, f,.... sono in progressione per differenza, e si lègge: a sta a b sta a c sta a d .....

269. *In qualunque progressione aritmetica la somma dei termini estremi è uguale alla somma dei termini equidistanti dagli estremi.*

Infatti, sia la progressione

$$\div\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f,$$

e sia r la ragione.

Prendendo i termini b ed e, che sono equidistanti dagli estremi, per definizione si ha:

$$b = a + r$$
$$e = f - r.$$

Sommando membro a membro queste due equazioni, si trova:

$$b + e = a + f.$$

Al modo stesso si proverebbe che

$$c + d = a + f.$$

270. Da ciò si deduce che quando il numero dei termini d'una progressione per differenza è impari, il termine di mezzo è la metà della somma degli estremi; esso è dunque la *media aritmetica* fra questi due termini.

Formule fondamentali.

271. Teorema 1.º — *Un termine qualunque d'una progressione per differenza è uguale al primo, più tante volte la ragione, quanti sono i termini che lo precedono.*

Infatti, sieno r la ragione ed l l'n^{esimo} termine della progressione

$$\div\, a . b . c . d . e \ldots\ldots j . k . l,$$

si avranno (n.º 265) le $n-1$ equazioni

$$b = a + r,\ \ c = b + r,\ \ d = c + r, \ldots\ldots k = j + r,\ \ l = k + r,$$

e sommandole,

$$b + c + d + \ldots\ldots + k + l = a + b + c + \ldots\ldots + k + (n-1)r,$$

da cui, sopprimendo i termini b, c, $d \ldots . k$ comuni ai due membri,

$$(1) \ldots \ldots l = a + (n-1)r,$$

come volevasi dimostrare.

272. Se in questa formula poniamo

$$n=1, \quad n=2, \quad n=3, \quad n=4 \ldots .,$$

l rappresenta successivamente i diversi termini della progressione, e si trova

$$a=a, \quad b=a+r, \quad c=a+2r, \quad d=a+3r, \ldots .$$

epperò si dà a questa espressione il nome di *termine generale di posto* n.

Applicazioni.

1.ª Il 16.º termine della progressione

$$\div 2 . 5 \ldots .. ,$$

il cui primo termine è 2, e la cui ragione è

$$5-2=3,$$

è uguale a

$$2+(16-1)\times 3=47.$$

2.ª Il 51.º termine della progressione

$$\div 16 . 12 \ldots .. ,$$

il cui primo termine è 16 e la cui ragione è

$$12-16=-4,$$

è uguale a

$$16+(51-1)\times -4=-184.$$

273. Teorema 2.° — *La somma dei termini d'una progressione per differenza è uguale alla semisomma dei termini estremi moltiplicata pel numero dei termini.*

Rappresentiamo con r la ragione e con n il numero dei termini della progressione

$$\div\ a\,.\,b\,.\,c\,.\,d\,.....\,i\,.\,j\,.\,k\,.\,l, \ldots\ldots \qquad A$$

e poniamo

$$s=a+b+c+d\,.....+i+j+k+l; \ldots\ldots \qquad B$$

scrivendo i termini inversamente, formeremo la progressione

$$\div\ l\,.\,k\,.\,j\,.\,i\,.....\,d\,.\,c\,.\,b\,.\,a, \ldots\ldots \qquad C$$

la cui ragione è $-r$, il che fa vedere che essa è crescente se la prima è decrescente e reciprocamente; ma la somma dei termini non restando alterata per questa disposizione, avremo ancora

$$s=l+k+j+i\,.....+d+c+b+a; \ldots\ldots \qquad D$$

poi, sommando le due equazioni *B* e *D*,

$$2s=(a+l)+(b+k)+(c+j)+(d+i)\,.....$$
$$.....+(k+b)+(l+a)\ldots\ldots \qquad E$$

Ora, per la natura delle progressioni *A* e *C*, si ha

$$a+r=b,\quad b+r=c,\quad c+r=d,\,.....\,k+r=l;$$
$$l-r=k,\quad k-r=j,\quad j-r=i,\,.....\,b-r=a;$$

e prendendo la somma delle equazioni corrispondenti ed osservando al tempo stesso che i termini r e $-r$ si distruggono, avremo (n.° 269)

$$a+l=b+k,\quad b+k=c+j,\quad c+j=d+i,\,.....\,k+b=l+a,$$

da cui

$$a+l=b+k=c+j=d+i\,.....=l+a.$$

Il secondo membro dell'equazione E si compone di n binomi uguali ad $a+l$, e conseguentemente essa si riduce a

$$(2)\ldots\ldots 2s=(a+l)n, \quad \text{onde} \quad s=\left(\frac{a+l}{2}\right)n,$$

come volevasi provare.

ESEMPI:

1.° La somma dei termini della progressione

$$\div 5 \,.\, 8 \,.\, 11 \,.\, 14 \,.\, 17 \,.\, 20 \,.\, 23 \,.\, 26 \,.\, 29 \,.\, 32,$$

i cui termini estremi sono 5 e 32, e della quale il numero dei termini è 10, è uguale a

$$\left(\frac{5+32}{2}\right)\times 10=185.$$

2.° Se fosse proposto di sommare i 21 primi termini della progressione

$$\div\ 15 \,.\, 11 \ldots\ldots,$$

che ha per primo termine 15 e per ragione

$$11-15=-4,$$

si osserverebbe primieramente che il 21.° termine è uguale a

$$15+20\times -4=-65;$$

poi, si avrebbe per la somma cercata

$$\left(\frac{15-65}{2}\right)\times 21=-525.$$

3.° La somma degli n primi numeri naturali è uguale a

$$\frac{n(n+1)}{2};$$

perchè gli n primi numeri

$$1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots\ldots n$$

formano una progressione per differenza, i cui termini estremi sono 1 ed n, d'onde si deduce che

$$1+2+3+\ \ldots\ldots +n=\left(\frac{1+n}{2}\right)n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Così la somma dei 1000 primi numeri è uguale a

$$\frac{1000\times1001}{2}=500500.$$

4.° La somma degli n primi numeri impari è uguale ad n^2; perchè gli n primi numeri impari

$$1,\ 3,\ 5,\ 7\ldots\ldots$$

costituiscono una progressione per differenza, che ha per primo termine 1, per ragione 2 e per ultimo termine

$$1+(n-1)\times2=2n-1;$$

dunque

$$1+3+5+7\ldots\ldots+(2n-1)=\left(\frac{1+2n-1}{2}\right)n=n\times n=n^2.$$

Così, la somma dei 100 primi numeri impari è uguale a

$$100^2=10000.$$

274. Problema. — *Inserire* m *medi aritmetici fra due quantità* a *ed* l.

Questo problema consiste evidentemente nel trovare la ragione r d'una progressione per differenza composta di $m+2$ termini ed avente per termini estremi le quantità a ed l. Ora il termine l essendo di posto $(m+2)^{esimo}$, è preceduto da $m+1$ termini; ed in virtù

della formula (1), si ha l'equazione

$$l=a+(m+1)r, \quad \text{da cui} \quad r=\frac{l-a}{m+1}$$

cioè: *la ragione cercata è uguale alla differenza delle due quantità date, divisa pel numero de' medi da inserire, più uno.*

Quindi, per ottenere gli m medî, non resta che sostituire questo valore di r nelle m espressioni

$$a+r, \quad a+2r, \quad a+3r, \ldots \; a+mr.$$

Ponendo $m=1$, si ha

$$r=\frac{l-a}{2},$$

ed il medio domandato è

$$a+\frac{l-a}{2}=\frac{a+l}{2};$$

cioè ritrovasi la legge per cui si scopre la media aritmetica fra due numeri dati.

Esempio. — Debbansi inserire 7 medì aritmetici fra i numeri 3 e 19; si avrà

$$r=\frac{19-3}{7+1}=\frac{16}{8}=2,$$

ed i 7 medî cercati saranno

$$5, \; 7, \; 9, \; 11, \; 13, \; 15, \; 17;$$

in guisa che ne risulterà la progressione

$$\div \; 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 15 \,.\, 17 \,.\, 19.$$

275. *Se in una progressione aritmetica s'inserisce uno stesso numero di medî aritmetici fra ciascun termine ed il seguente, la nuova serie sarà ancora una progressione per differenza.*

Infatti, le progressioni parziali che così si ottengono hanno la stessa ragione: e poichè l'ultimo termine dell'una è il primo della seguente, il loro insieme forma ancora una progressione aritmetica.

Esempio. — Sia la progressione

$$\div\ 2 . 8 . 14 . 20.$$

Inserendo 2 medi fra 2 e 8, fra 8 e 14, fra 14 e 20, le rispettive ragioni per la formula precedente sono:

$$\frac{8-2}{3}=\frac{6}{3}=2;\quad \frac{14-8}{3}=\frac{6}{3}=2;\quad \frac{20-14}{3}=\frac{6}{3}=2.$$

Quindi si ha la progressione:

$$\div\ 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 . 14 . 16 . 18 . 20.$$

276. *La media aritmetica fra tutti i termini d'una progressione per differenza è uguale alla media aritmetica fra i due termini estremi.*

Ciò risulta immediatamente dall'equazione

$$s=\left(\frac{a+l}{2}\right)n,\quad \text{da cui si ricava}\quad \frac{s}{n}=\frac{a+l}{2}.$$

Problemi sulle progressioni per differenza.

277. Le formule fondamentali della teoría delle progressioni per differenza

$$(1) \ldots\ldots l=a+(n-1)r,$$
$$(2) \ldots\ldots 2s=(a+l)n$$

che contengono cinque quantità a, l, n, r, s, possono servire a determinare due delle medesime, quando si conoscano le altre tre. Da ciò resultano dieci problemi,

le cui incognite sono:

1.° a, l; 2.° a, n; 3.° a, r; 4.° a, s; 5.° l, n; 6.° l, r; 7.° l, s; 8.° n, r; 9.° n, s; 10.° r, s.

Avanti di occuparcene, faremo osservare che le quantità a, l, r, s possono essere qualunque, positive o negative, intere o frazionarie, ma che la quantità n dev' essere un numero intero positivo.

278. Problema 1.° — *Determinare* a *ed* l, *conoscendo* n, r *ed* s.

Le formule (1) e (2) possono facilmente porsi sotto la forma

$$l-a=(n-1)r, \quad l+a=\frac{2s}{n};$$

sommandole membro a membro e riducendo, si troverà

$$l=\frac{2s}{2n}+\frac{(n-1)r}{2}=\frac{2s+n(n-1)r}{2n};$$

e sottraendo una dall' altra le stesse due formule, avremo

$$a=\frac{2s}{2n}-\frac{(n-1)r}{2}=\frac{2s-n(n-1)r}{2n}.$$

279. Problema 2.° — *Determinare* a *ed* n, *conoscendo* l, r *ed* s.

Dalla formula (1) si ricava

$$(G) \ldots\ldots a=l+r-rn;$$

sostituendo questo valore nella formula (2), si ha

$$2s=(2l+r-rn)n,$$

equazione di secondo grado rispetto ad n, che si tra-

sforma in

$$n^2 - \frac{(2l+r)}{r} n = -\frac{2s}{r},$$

da cui si deduce

$$n = \frac{2l+r \pm \sqrt{(2l+r)^2 - 8rs}}{2};$$

sostituendo questo valore di n nella formula (G), si troverà

$$a = \frac{r \pm \sqrt{(2l+r)^2 - 8rs}}{2}.$$

Quando l'espressione

$$(21+r)^2 - 8rs$$

è negativa, i valori delle incognite sono immaginari ed il problema è impossibile; se l'espressione stessa è positiva, vi sono, algebricamente parlando, due soluzioni; tuttavia non bisogna perdere di vista che debbonsi rigettare quelle che non corrispondono a valori interi e positivi di n.

Se poniamo

$$r = 2, \quad l = 21 \quad ed \quad s = 120,$$

i resulati precedenti dànno:

1.° $n = 12$; $a = -1$; 2.° $n = 10$; $a = 3$.

Queste due soluzioni sono ammissibili.

280. Problema 3.° — *Determinare* a *ed* r, *conoscendo* l, n *ed* s.

L'equazione (2) ci dà

$$a = \frac{2s - ln}{n};$$

moltiplicando poi l'equazione (1) per n ed eliminando a, troveremo

$$ln = 2s - ln + n(n-1)r, \quad \text{da cui} \quad r = \frac{2(ln-s)}{n(n-1)}.$$

281. Problema 4.° — *Determinare* a *ed* s, *conoscendo* l, n *ed* r.

Bisogna prendere il valore di a nella formula (1) e sostituirlo nella (2), e si avrà

$$a = l - (n-1)r, \quad s = \frac{[2l - (n-1)r]}{2}\,n.$$

282. Problema 5.° — *Determinare* l *ed* n, *conoscendo* a, r *ed* s.

Col metodo tenuto per risolvere il problema 2.°, si troverà

$$n = \frac{r - 2a \pm \sqrt{(2a-r)^2 + 8rs}}{2r},$$

$$l = \frac{-r \pm \sqrt{(2a-r)^2 + 8rs}}{2}.$$

Ponendo

$$a = 1, \quad r = 3 \quad ed \quad s = 70,$$

queste formule dànno

$$1.^\circ\ n = 7; \quad l = 19; \quad 2.^\circ\ n = -6\frac{2}{3}; \quad l = -22;$$

le seconda soluzione è evidentemente inammissibile.

283. Problema 6.° — *Determinare* l *ed* r, *conoscendo* a, n *ed* s.

Operando come nel problema 3.°, si ottiene

$$l = \frac{2s - an}{n}, \quad r = \frac{2(s - an)}{n(n-1)}.$$

284. Problema 7.º — *Determinare* l *ed* s, *conoscendo* a, n *ed* r.

L' incognita l si determina per mezzo della formula (1)

$$l=a+(n-1)r,$$

e sostituendo questo valore nella (2), si ha

$$s=\frac{2a+(n-1)r}{2}n,$$

espressione usata frequentemente per sommare una progressione per differenza di cui si conoscono il primo termine, la ragione ed il numero dei termini.

Si debbano, ad esempio, sommare i 12 primi termini della progressione ÷ 5 . 9.....; si avrà

$$a=5, \quad r=4, \quad n=12,$$

e per conseguenza

$$s=\left(\frac{2\times5+11\times4}{2}\right)\times12=324.$$

285. Problema 8.º — *Determinare* n *ed* r, *conoscendo* a, l *ed* s.

Dalla formula (2) si ricava

$$n=\frac{2s}{a+l};$$

sostituendo questo valore nella formula (1), poi risolvendo rispetto ad r l'equazione che ne risulta, si troverà:

$$r=\frac{(l+a)\,(l-a)}{2s-(a+l)}=\frac{l^2-a^2}{2s-a-l}.$$

286. Problema 9.º — *Determinare* n *ed* s, *conoscendo* a, l *ed* r.

La formula (1) ci dà

$$n-1=\frac{l-a}{r}, \quad \text{da cui} \quad n=\frac{l-a+r}{r};$$

e sostituendo nella formula (2), si ottiene

$$s=\frac{(l+a)(l-a+r)}{2r}.$$

287. Problema 10.° — *Determinare* r *ed* s, *conoscendo* a, l *ed* n.

Le equazioni (1) e (2) daranno immediatamente

$$r=\frac{l-a}{n-1}, \quad s=\frac{(a+l)n}{2}.$$

Applicazioni.

288. 1.ª *Un viaggiatore vorrebbe arrivare in 4 giorni al suo destino, accelerando ogni giorno il suo viaggio di 3 chilometri. Per ottenere il suo intento bisogna che l'ultimo giorno faccia chilometri* $29\frac{1}{2}$. — *Quanti ne dovrà fare il primo giorno?* — *Quanti chilometri avrà fatto nei 4 giorni?*

Questo problema si risolve colla formula che dà il valore di a, quando si conoscono l, r, n (n.° 281). Si avrà dunque:

$$a=29\frac{1}{2}-(4-1)\times 3=20\frac{1}{2}.$$

Il primo giorno dovrà dunque fare chilom. $20\frac{1}{2}$.

Per sapere ora quanti chilometri ha fatto nei 4 giorni, faremo uso della formula (2) (n.° 273), ed avremo:

$$s=\frac{\left(20\frac{1}{2}+29\frac{1}{2}\right)}{2}\times 4=100 \text{ chilom.}$$

289. 2.ª *In quanti giorni un viaggiatore farebbe 100 chilometri, se il primo giorno ne facesse $20\frac{1}{2}$, il secondo $23\frac{1}{2}$, il terzo $26\frac{1}{2}$, e così di seguito?*

Facendo uso della formola che dà il valore di n, quando si conoscono a, r, s (n.° 282), avremo:

$$n=\frac{3-2.20\frac{1}{2}+\sqrt{(2.20\frac{1}{2}-3)^2+8.3.100}}{2\,.\,3}=4 \text{ giorni.}$$

290. 3.ª *Una persona ha pagato una somma in più mesi di seguito. Essa ha dato lire 6 il primo mese e lire 102 l'ultimo, ed ogni mese ha pagato lire 12 di più del mese precedente. — In quanti mesi ha pagato il suo debito?*

Qui conosciamo

$$a=6, \quad l=102, \quad r=12,$$

e si cerca n.

Facendo dunque uso della formula (n.° 286), si ha:

$$n=\frac{102-6+12}{12}=9 \text{ mesi.}$$

291. 4.ª *In un ammasso di palle da cannone disposte in progressione aritmetica crescente, vi sono 18 ordini, ciascuno dei quali contiene 2 palle di più del precedente, e le palle sono in tutto 360. — Trovare quante ve n' ha nell' ultimo ordine.*

Poichè si conoscono r, n ed s, si avrà (n.° 280):

$$l=\frac{2\times360+18\times(18-1)\times2}{2\,.\,18}=37 \text{ palle.}$$

292. 5.ª *Una barca di fuggitivi fa nel primo giorno del suo viaggio 13 chilometri, ed ogni giorno 2 chilometri*

di più del precedente. Un vascello che l' insegue veleggia con questa progressione 6, 11, 16, ecc. — Domandasi fra quanti giorni la raggiungerà.

È chiaro che qui si cerca il numero n dei termini in cui le due progressioni dieno la stessa somma.

Ora l'*ennesimo* termine della prima progressione è

$$13+(n-1)2,$$

e l'*ennesimo* termine della seconda è

$$6+(n-1)5;$$

la somma degli n primi termini della prima progressione è

$$s=\frac{[13+13+(n-1)2]n}{2}=\frac{(24+2n)n}{2};$$

la somma degli n primi termini della seconda è

$$s=\frac{[6+6+(n-1)5]n}{2}=\frac{(7+5n)n}{2};$$

e poichè le due somme devono essere uguali, avremo l'equazione:

$$\frac{(24+2n)n}{2}=\frac{(7+5n)n}{2},$$

e dividendo ambi i membri per n,

$$\frac{24+2n}{2}=\frac{7+5n}{2},$$

ovvero

$$24+2n=7+5n;$$

da cui

$$n=5+\frac{2}{3}.$$

Dunque il vascello raggiungerà la barca in giorni

$$5+\frac{2}{3}.$$

293. 6.ª *Due mobili A e B percorrono la stessa linea retta e sono distanti 75 metri; il mobile A fa 1 metro nel primo minuto, 3 metri nel secondo, 5 metri nel terzo, e così di seguito; il mobile B fa 3 metri nel primo minuto, 4 metri nel secondo, 5 metri nel terzo, ecc. — Domandasi in quanti minuti il mobile A raggiungerà il mobile B, supposto che si muovano nel medesimo istante.*

A ——— 75^m ——— *B* ——————— *I* Punto d'incontro.

Ammettiamo che l'incontro avvenga dopo n minuti. Allora il mobile A avrà fatto tanti metri quante unità si trovano nel termine sommatorio della progressione aritmetica

$$\div 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 \ldots,$$

composta di n termini; della quale il termine di posto n è

$$1+2(n-1)=1+2n-2=2n-1;$$

ed il termine sommatorio

$$\left(\frac{1+2n-1}{2}\right)n=\frac{2n}{2}\times n=n^2.$$

Il mobile *B* dovrà aver percorso nel tempo che cerchiamo, tanti metri, quante unità si trovano nel termine sommatorio della progressione

$$\div 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 \ldots,$$

di cui il termine di posto n è

$$3+1(n-1)=3+n-1=2+n;$$

ed il termine sommatorio

$$\left(\frac{3+2+n}{2}\right)n=\left(\frac{5+n}{2}\right)n=\frac{5n+n^2}{2}.$$

Ora però giova riflettere che la distanza percorsa

dal mobile B aumentata di 75 metri deve uguagliare la distanza percorsa dal mobile A dal punto di partenza a quello d'incontro. — Il perchè abbiamo l'equazione di secondo grado completa

$$\frac{5n+n^2}{2}+75=n^2.$$

Risolvendola si troverà

$$n=15.$$

Dunque l'incontro dei due mobili dovrà avvenire dopo 15 minuti dall'istante della partenza, come può facilmente verificarsi.

Problemi da risolvere.

135. Data la progressione $\div$ 7 . 10....., si domanda: 1.° il 23.° termine; 2.° la somma dei 17 primi termini; 3.° la somma dei termini compresi fra il 7.° e il 19.°

Resultato: 1.° 73; 2.° 527; 3.° 473.

136. Un tale compra un cavallo col patto che pel 1.° chiodo pagherà L. 0,25, pel 2.° L. 0,40, pel 3.° L. 0,55, e similmente L. 0,15 di più per ciascuno dei seguenti; il cavallo ha 32 chiodi: quanto costerà al compratore?

Resultato: L. 82,40.

137. Un viaggiatore ha percorso 198 leghe in 33 giorni, facendo in ciascun giorno $\frac{1}{4}$ di lega di più che nel giorno precedente; quante leghe ha fatto il primo e l'ultimo giorno?

Resultato: Leghe 2 e 10.

138. Dividere Lire 95 fra 5 persone in maniera, che ciascuna abbia L. 5 di meno della precedente.

Resultato: Le parti sono 29, 24, 19, 14, 9.

139. Una lepre fa 60 salti nel 1.° minuto della sua corsa, 55 nel 2.°, 50 nel 3.°, e così di seguito; quanti salti farà avanti di fermarsi?

Resultato: Salti 390.

140. Trovare quattro termini in progressione aritmetica, sapendo che il prodotto degli estremi è 70, e quello de' medî 88.

Resultato: ÷ 5 . 8 . 11 . 14.

141. Un corpo cadendo nel vuoto percorre nel primo secondo 4^m,90448 e 9^m,80896 d'aumento in ogni secondo. — Se un corpo mette 20 secondi a cadere, si domanda quanti metri ha percorso nell'ultimo secondo e nei 20 secondi.

Resultato: Nel 20.° secondo 191^m,27, e nei 20 secondi 1912^m,747.

142. Quanti secondi sono necessari ad un corpo che cade nel vuoto per percorrere 3776 metri?

Resultato: 28 secondi.

143. Si hanno 18 numeri in progressione aritmetica: la somma dei medî è $31\frac{1}{2}$, il prodotto degli estremi è $85\frac{1}{5}$. — Trovare il primo termine e la ragione della progressione.

Resultato: 1.° termine 3; ragione $1\frac{1}{2}$.

144. Dall' 8 al 19 giugno il termometro sale ogni giorno un mezzo grado, e se la temperatura media di questi 12 gradi è $18\frac{3}{4}$, si domanda qual' era la temperatura l' 8 giugno.

Resultato: 16 gradi.

145. Due persone vanno incontro l' una all' altra; l'una parte da A e l'altra da B, che sono distanti 170 leghe. La seconda persona fa ogni giorno 4 leghe; la prima persona il primo giorno fa 2 leghe e ogni giorno seguente una mezza lega di più. — A quale distanza da A s'incontreranno?

Resultato: A 102 leghe da A.

Progressioni per quoziente.

294. *Una progressione geometrica* o *per quoziente* è una serie di termini, di cui ciascuno è uguale al precedente moltiplicato per una quantità costante, che chiamasi *ragione*.

Così, nelle uguaglianze

$$ar=b, \quad br=c, \quad cr=d, \quad dr=e, \quad er=f\ldots..,$$

i termini a, b, c, d, e, f..... formano una progressione per quoziente, la cui ragione è r.

Quando la ragione r è positiva, tutti i termini della progressione hanno lo stesso segno; quando è negativa, essi sono alternativamente positivi e negativi.

295. Una progressione per quoziente è detta *crescente* o *decrescente*, secondochè il valor numerico della

ragione è maggiore o minore dell' unità; le due progressioni

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ 48,\ 96.....$$

$$5,\quad -\frac{5}{2},\ \frac{5}{4},\ -\frac{5}{8},\ \frac{5}{16},\ -\frac{5}{32},.....$$

sono la 1.ª crescente e la 2.ª decrescente; la ragione della 1.ª è

$$6:3=2;$$

quella della 2.ª è

$$-\frac{5}{2}:5=-\frac{1}{2}.$$

296. *Un termine qualunque d'una progressione per quoziente è uguale alla media proporzionale fra quello che lo precede e quello che lo segue.*

Ed infatti, se f, g, h sono tre termini consecutivi qualunque d' una serie di tal genere, rappresentando con r la ragione, avremo:

$$fr=g, \quad gr=h;$$

e dividendo queste due equazioni membro a membro,

$$\frac{f}{g}=\frac{g}{h},$$

da cui

$$fh=g^2; \text{ epperò } g=\sqrt{fh},$$

conforme è detto sopra.

297. Da ciò rilevasi che la progressione geometrica può esser considerata come un seguito di proporzioni continue, in cui tutti i termini (eccetto il primo e l'ultimo) fanno l' ufficio di antecedente e di conseguente; ed ecco il perchè volendo indicare che una serie di termini costituisce una pogressione per quoziente, si

scrivono gli uni di seguito agli altri, separandoli con due punti (:), che significano *sta a*, e si fa precedere il primo termine da una linetta orizzontale con due punti sopra e due sotto.

Così l'espressione

$$\div a : b : c : d : e : f : \ldots..$$

indica che le quantità

$$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f, \ldots..$$

sono in progressione per quoziente, e si lègge:

a sta a b sta a c sta a d sta a f.....

298. *In qualunque progressione geometrica, il prodotto dei termini estremi è uguale al prodotto dei termini equidistanti dagli estremi.*

Sia la progressione

$$\div a : b : c : d : e : f;$$

e sia r la ragione.

Prendendo due termini qualunque, per esempio b ed e, equidistanti dagli estremi, per definizione si ha:

$$b = ar$$
$$e = f : r.$$

Moltiplicando membro a membro queste due uguaglianze si trova

$$be = af.$$

Al modo stesso si proverebbe che

$$cd = af.$$

299. Da ciò si deduce che quando il numero dei termini di una progressione geometrica è impari, il termine di mezzo è la radice quadrata del prodotto degli estremi; esso è dunque *la media proporzionale fra questi due estremi.*

300. *Il prodotto dei termini d' una progressione per quoziente è uguale alla radice quadrata del prodotto degli estremi, innalzato ad una potenza, il cui grado è uguale al numero dei termini.*

Abbiasi la progressione

$$\div\div a : b : c : d : e : f.$$

Indicando con P il prodotto di tutti i termini, si ha:

$$P = abcdef;$$

inversamente

$$P = fedcba.$$

Moltiplicando queste due uguaglianze membro a membro, si ottiene:

$$P^2 = af \times be \times cd \times dc \times eb \times fa.$$

Ora, in virtù del principio precedente questi prodotti sono uguali fra loro; quindi chiamando n il numero di questi prodotti, potremo scrivere:

$$P^2 = (af)^n;$$

ed estraendo la radice quadrata da ambi i membri,

$$P = \sqrt{(af)^n},$$

come dovevasi dimostrare.

Formule fondamentali.

301. Teorema 1.° — *Un termine qualunque d' una progressione per quoziente è uguale al primo moltiplicato per la ragione innalzata alla potenza indicata dal numero dei termini che lo precedono.*

Infatti, sieno r la ragione ed l l'n^{esimo} termine della progressione

$$\div\div a : b : c : d : e : \ldots\ldots j : k : l;$$

si avranno le $n-1$ (n.° 294):

$$b=ar,\quad c=br,\quad d=cr,\quad e=dr, \ldots\ldots k=jr,\quad l=kr,$$

e moltiplicandole fra loro,

$$bcde \ldots\ldots kl=abcd \ldots\ldots jkr^{n-1},$$

da cui, dividendo per

$$bcde \ldots\ldots k,$$
$$l=ar^{n-1}, \ldots\ldots (1)$$

il che dimostra il teorema.

Se in questa formula poniamo

$$n=1,\quad n=2,\quad n=3, \ldots\ldots$$

l rappresenta successivamente i diversi termini della progressione, e si trova

$$a=a,\quad b=ar,\quad c=ar^2,\quad d=ar^3, \ldots\ldots$$

epperò si dà a quest' espressione il nome di *termine generale di posto* n.

ESEMPI:

1.° Il 7.° termine della progressione

$$\div 3 : 6 : \ldots\ldots,$$

il cui primo termine è 3, e la cui ragione è

$$6 : 3=2,$$

è uguale a

$$3\times 2^6=192.$$

2.° Il 6.° termine della progressione

$$\div 2 : -3 : \ldots\ldots,$$

che ha per primo termine 2 e per ragione

$$-3:2=-\frac{3}{2},$$

è uguale a

$$2\left(-\frac{3}{2}\right)^5=-\frac{243}{16}=-15\frac{3}{16}.$$

302. Teorema 2.° — *La somma dei termini d'una progressione geometrica è uguale al quoziente ottenuto, dividendo per la ragione diminuita di un'unità, il prodotto dell'ultimo termine per la ragione, diminuito del primo termine.*

Consideriamo la progressione

$$\div\!\!\div\, a:b:c\;d:\ldots\ldots i:j:k:l,$$

e poniamo

$$s=a+b+c+d+\ldots\ldots+i+j+k+l;$$

da questa equazione, moltiplicando per la ragione r, resulta

$$sr=ar+br+cr+dr+\ldots\ldots+ir+jr+kr+lr;$$

togliendo ora la prima equazione dalla seconda, ponendo s a fattor comune ed osservando relativamente all'ultima, che

$$ar=b,\quad br=c,\quad cr=d,\ldots\ldots kr=l,$$

si ha

$$s(r-1)=lr-a,\quad \text{da cui}\quad s=\frac{lr-a}{r-1},\ldots\ldots(2)$$

il che dovevasi dimostrare.

ESEMPI:

1.° La somma dei termini della progressione

$$\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384,$$

nella quale

$$a=3, \quad l=384, \quad r=2,$$

è uguale a

$$\frac{384\times2-3}{2-1}=765.$$

2.° Debbansi sommare i 9 primi termini della progressione

$$\div 1 : -3 : \ldots\ldots ;$$

osserveremo primieramente che in questo caso

$$a=1, \quad r=-3,$$

e che il 9.° termine è

$$1\times(-3)^8=6561;$$

indi concluderemo che la somma cercata è

$$\frac{6561\times-3-1}{-3-1}=4921.$$

303. Problema. — *Inserire* m *medi proporzionali fra le due quantità* a *ed* l.

Il problema si riduce evidentemente a trovare la ragione r d'una progressione per quoziente, i cui estremi sono a ed l e di cui il numero dei termini è $m+2$; ora, il termine l, essendo di posto $(m+2)^{esimo}$, si trova preceduto da $m+1$ termini; e per conseguenza (n. 301) si ha $l=ar^{m+1}$; da cui, dividendo per a ed estraendo

la radice di grado $m+1$ dai due membri, si ricava

$$r=\sqrt[m+1]{\frac{l}{a}};$$

la qual formula esprime che *la ragione cercata si ottiene estraendo dal rapporto delle due quantità* l *ed* a *la radice di un grado indicato dal numero de' medî da inserire, più uno.*

La ragione r essendo così determinata, gli m medî saranno

$$ar,\ ar^2,\ ar^3 \ldots\ldots ar^m.$$

Ponendo $m=1$, si ha:

$$r=\sqrt{\frac{l}{a}},$$

ed il medio domandato è

$$a\sqrt{\frac{l}{a}}=\sqrt{al}.$$

Così ritrovasi l'espressione della legge per cui si scuopre la media proporzionale per quoziente fra due quantità date.

Esempio. — Debbansi inserire 7 medî fra i numeri 5 e 1280; si avrà

$$a=5;\quad l=1280;\quad m=7,$$

e per conseguenza

$$r=\sqrt[8]{\frac{1280}{5}}=\sqrt[8]{256}=2;$$

dunque i 7 medî cercati sono

10, 20, 40, 80, 160, 320, 640;

cioè abbiamo la progressione

$$∺ 5 : 10 : 20 : 40 : 80 : 160 : 320 : 640 : 1280.$$

304. *Data una progressione geometrica, se s'inserisce un egual numero di medî geometrici fra ciascun termine ed il seguente, si ha sempre una progressione.*

Infatti, le progressioni parziali che così si ottengono hanno la stessa ragione; e poichè l'ultimo termine dell'una è il primo termine della seguente, il loro insieme forma ancora una progressione per quoziente.

Esempio. — Sia la progressione

$$∺ 3 : 48 : 768 : 12288.$$

Inserendo 3 medî fra 3 e 48, fra 48 e 768, fra 768 e 12278, essendo 16 la ragione primitiva, le rispettive ragioni per la formula precedente sono:

$$\sqrt[4]{\frac{48}{3}}=\sqrt[4]{16}=2; \quad \sqrt[4]{\frac{768}{48}}=\sqrt[4]{16}=2;$$

$$\sqrt[4]{\frac{12288}{768}}=\sqrt[4]{16}=2;$$

dal che si vede che la nuova ragione è la radice quarta della ragione primitiva; per cui si passa da un termine all'altro per progressione, la quale sarà:

$$∺ 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192 : 384 : 768 : 1536$$
$$: 3072 : 6144 : 12288.$$

305. *La media proporzionale fra tutti i termini d'una progressione per quoziente è uguale alla media proporzionale fra i termini estremi* (1).

(1) Si suol chiamare *media proporzionale per quoziente* fra più quantità ciò che resulta allorchè dal loro prodotto si estrae una radice di grado uguale al numero di esse quantità.

Infatti, rappresentando con r la ragione della progressione

$$\div a : b : c : d : \ldots\ldots : l,$$

abbiamo le seguenti equazioni:

$$a = a, \quad b = ar, \quad c = ar^2, \quad d = ar^3 \ldots\ldots l = ar^{n-1};$$

e moltiplicandole membro a membro,

$$abcd \ldots\ldots l = a \times ar \times ar^2 \times ar^3 \times \ldots\ldots \times ar^{n-1}$$
$$= a \times a \times a \ldots\ldots \times a \times r \times r^2 \times r^3 \times \ldots\ldots \times r^{n-1};$$

ovvero, osservando che

$$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2},$$

sarà

$$abcd \ldots\ldots l = a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}};$$

estraendo la radice n^{esima}, si avrà

$$\sqrt[n]{abcd \ldots\ldots l} = ar^{\frac{n-1}{2}} \sqrt{a \times ar^{n-1}} = \sqrt{al},$$

come dovevasi dimostrare.

Progressioni per quoziente decrescenti all'infinito.

306. Teorema. — *La somma dei termini d'una progressione per quoziente decrescente, prolungata all'infinito, è uguale al quoziente del primo termine diviso per l'unità, diminuita della ragione.*

Abbiasi la progressione

$$\div a : ar : ar^2 : ar^3 \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

ed L sia la somma di tutti i termini, dei quali l'ultimo ar^{∞} può essere considerato come minore di qualunque quantità immaginabile, attesochè si suppone $r<1$; e le potenze successive d'una frazione diminuiscono di più in più e tendono verso *zero*.

L'equazione

$$L=a+ar+ar^2+ar^3+\ldots..$$

moltiplicata per r diviene

$$Lr=ar+ar^2+ar^3+ar^4+\ldots..;$$

togliendo questa dalla prima, si ottiene

$$L(1-r)=a, \quad \text{da cui} \quad L=\frac{a}{1-r}.$$

Dividendo a per $1-r$, si ritrova effettivamente la serie infinita

$$a+ar+ar^2+ar^3+\ldots..$$

Debbasi, ad esempio, sommare la progressione decrescente all' infinito

$$\div 1:\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{8}:\frac{1}{16}:\ldots..;$$

bisognerà porre nella formula precedente

$$a=1, \quad r=\frac{1}{2},$$

ed avremo:

$$L=1:\left(1-\frac{1}{2}\right)=2:(2-1)=2.$$

Ciò si può d'altronde verificare facilmente, osservando che

$$2=1+1, \quad 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\ldots.$$

da cui, per sostituzioni successive si deduce

$$2=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots$$

307. Ecco un altro metodo per giungere alla stessa formula.

Sia S_n la somma degli n primi termini

$$a,\quad ar,\quad ar^2\ldots\ldots ar^{n-1}$$

della progressione decrescente (A), avremo (n.° 302):

$$S_n=\frac{ar^{n-1}\times r-a}{r-1}=\frac{a-ar^n}{1-r},$$

oppure, decomponendo l'ultimo membro,

$$S_n=\frac{a}{1-r}-\frac{a}{1-r}r^n;$$

ora, ponendo $n=\infty$, nel qual caso

$$r^\infty=0 \quad \text{ed} \quad S_\infty=L,$$

si troverà ugualmente

$$L=\frac{a}{1-r}.$$

Togliendo il valore di S_n da quello di L, si ha

$$L-S_n=\frac{a}{1-r}r^n\ldots\ldots\ldots\ldots(B);$$

il che mostra che il valore numerico della differenza $L-S_n$ decresce a misura che n aumenta, e che non può aversi $L-S_n=0$, ovvero $L=S_n$ che quando $n=\infty$.

L'espressione L verso la quale tendono le somme S_1, S_2, S_3, S_4 ..... è dunque *il limite* della quantità variabile S_n.

Quando r è positiva, il primo membro $L-S_n$ ha sempre lo stesso segno di a, qualunque sia n; per conseguenza le somme S_1, S_2, S_3, $S_4 \ldots$, sono tutte minori o maggiori di 1, secondochè a è positivo o negativo.

Quando al contrario r è negativa, le potenze successive di r e quindi i valori di $L-S_n$ sono alternativamente positivi e negativi; in guisachè il limite L è costantemente compreso fra i due valori consecutivi di S_n.

308. Facciasi $r=1$ nell'equazione identica

$$\frac{a}{1-r}=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\ldots\ldots;$$

essa produce

$$\frac{a}{0}=a+a+a+a+a+\ldots\ldots=\infty;$$

resultato altrove stabilito.

Facciasi ancora $r=-1$; l'equazione diviene

$$\frac{a}{2}=a-a+a-a+a-\ldots\ldots$$

in questo caso si ha evidentemente

$$S_1=a,\quad S_2=0,\quad S_3=a,\quad S_4=0,\ldots\ldots$$

ma l'equazione (B) cambiandosi in

$$L-s_n=\frac{a}{2}\left(-1\right)^n,$$

mostra che l'errore commesso è alternativamente

$$\frac{a}{2} \text{ e } -\frac{a}{2}.$$

309. Se la ragione r è numericamente maggiore dell' unità, nel qual caso la progressione è crescente, il secondo membro dell'equazione (B), e quindi il primo $L-S_n$, cresce, astrazion fatta dai segni, nello stesso tempo di n; dimodochè ponendo $n=\infty$, questa differenza supera qualunque quantità immaginabile. Si vede adunque che in quest' ipotesi le somme

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots\ldots$$

differiscono di più in più dall'espressione L, che non potrebbe allora considerarsi come il loro limite.

Da ciò segue che *la somma dei termini d'una progressione crescente, prolungata all'infinito, è essa stessa infinita.*

310. Si può utilizzare la formula precedente per ridurre in frazione ordinaria una frazione decimale periodica data; ossia per trovare la generatrice d'una frazione decimale periodica semplice.

Prendiamo, per esempio, la frazione decimale

$$0{,}777\ \ldots\ldots;$$

avremo:

$$0{,}777\ldots\ldots=\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\frac{7}{1000}+\ldots\ldots=\frac{7}{10}:\left(1-\frac{1}{10}\right)=\frac{7}{9}.$$

In generale, sia p un numero composto di n cifre e consideriamo la frazione decimale periodica

$$0{,}ppp\ \ldots\ldots;$$

avremo ugualmente

$$0{,}ppp\ \ldots\ldots=\frac{p}{10^n}+\frac{p}{10^{2n}}+\frac{p}{10^{3n}}\ldots\ldots$$

$$=\frac{p}{10^n}:\left(1-\frac{1}{10^n}\right)=\frac{p}{10^n-1}.$$

Il che conduce alla nota regola, la quale consiste, come sappiamo, nel dividere il periodo per un numero espresso da tante volte la cifra 9, quante sono le sue cifre.

Problemi sulle progressioni per quoziente.

311. Le formule fondamentali

$$(1) \ldots\ldots l=ar^{n-1},$$
$$(2) \ldots\ldots s(r-1)=lr-a,$$

contengono, come quelle delle progressioni per differenza, cinque quantità a, l, n, r ed s che possono servire a determinare due di esse, quando tre sono conosciute.

Da ciò resultano dieci problemi analoghi a quelli del n.° 277.

La soluzione dei quattro problemi, le cui incognite sono:

$$1.^\circ\ a,\ n;\quad 2.^\circ\ l,\ n;\quad 3.^\circ\ n,\ r;\quad 4.^\circ\ n,\ s,$$

può aversi mediante l' uso dei logaritmi, epperò ne parleremo in quella teorìa.

312. Problema 1.° — *Determinare* a *ed* l, *conoscendo* n, r *ed* s.

Eliminando l fra le equazioni (1) e (2), si ha

$$s(r-1)=a(r^n-1),\quad \text{da cui}\quad a=\frac{s(r-1)}{r^n-1};$$

e sostituendo nella (1),

$$l=\frac{s(r-1)r^{n-1}}{r^n-1}.$$

313. Problema 2.° — *Determinare* a *ed* r *conoscendo* l, n *ed* s.

L'equazione (2) moltiplicata per r^{n-1} diviene

$$sr^n - sr^{n-1} = lr^n - ar^{n-1},$$

e sostituendo ad a^{n-1} il suo valore l,

$$sr^n - sr^{n-1} = lr^n - l,$$

ovvero

$$(s-l)r^n - sr^{n-1} + l = 0;$$

per trovare l'incognita r bisognerà dunque risolvere una equazione di grado n, dopodichè l'equazione

$$a = l : r^{n-1}.$$

farà conoscere la seconda incognita a.

314. Problema 3.° — *Determinare* a *ed* s, *conoscendo* l, n *ed* r.

La formula (1) dà subito il valore di a, e la sostituzione di questo valore nella formula (2) fa conoscere s; così trovasi

$$a = \frac{l}{r^{n-1}}, \quad s = \frac{(r^n - 1)l}{(r-1)r^{n-1}}.$$

315. Problema 4.° — *Determinare* l *ed* r, *conoscendo* a, n *ed* s.

Eliminando l fra (1) e (2) si hanno per risolvere il problema le due equazioni

$$ar^n - sr + s - a = 0, \quad l = ar^{n-1};$$

epperò il problema stesso dipende dalla soluzione di una equazione di grado n.

316. Problema 5.° — *Determinare* r *ed* s, *conoscendo* a, l *ed* n.

Dall'equazione (1) si ricava

$$r=\sqrt[n-1]{\frac{l}{a}};$$

sostituendo questo valore nell' equazione (2) e moltiplicando per

$$\sqrt[n-1]{a},$$

abbiamo

$$s(\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a})=l\sqrt[n-1]{l}-a\sqrt[n-1]{a}.$$

da cui

$$s=\frac{l\sqrt[n-1]{l}-a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{l}-\sqrt[n-1]{a}}.$$

317. Problema 6.° — *Determinare* l *ed* s, *conoscendo* a, n *ed* r.

L'equazione (1) dà il valore di l; e questo valore sostituito nell'equazione (2), ci fa trovare quello di s. Questi valori sono

$$l=ar^{n-1},\quad s=\frac{a(r^n-1)}{r-1}.$$

318. Il primo termine a, la ragione r e la somma

L di tutti i termini d'una progressione per quoziente decrescente all'infinito, essendo legati dalla relazione

$$L=\frac{a}{1-r}$$

si potrà ugualmente, conoscendo due di queste quantità, determinare la terza. Da ciò resultano tre problemi che sono risoluti dalle formule seguenti:

$$1.^a\ L=\frac{a}{1-r};\quad 2.^a\ r=\frac{L-a}{L};\quad 3.^a\ a=L(1-r).$$

Applicazioni.

319. 1.ª *Si è attinto in cinque volte del vino da una botte, seguendo una progressione geometrica crescente, il cui ultimo termine è 243 litri e la ragione è 3. — Quanti litri si sono attinti la prima volta?*

Si conoscono

$$l=243,\quad r=3,\quad n=5,$$

onde la formula (n.° 314) scioglie il problema, e si ha:

$$a=\frac{243}{3^{5-1}}=\frac{243}{3^4}=\frac{243}{81}=3 \text{ litri.}$$

320. 2.ª *Supponghasi che la popolazione d'un paese sia cresciuta uniformemente ogni anno con tale rapidità, che di 10000 anime che vi erano prima, se ne trovino 14641 in capo a 4 anni. — Si cerchi con qual progressione si è fatto questo aumento.*

Abbiamo

$$a=10000,\quad l=14641,\quad n=5$$

(perchè al cominciare dei 4 anni si ha già il primo termine 10000), e si cerca r, che ci vien dato dalla formula (n.° 316), per cui

$$r=\sqrt[4]{\frac{14641}{10000}}=\frac{11}{10},$$

che è la ragione della progressione; onde le 10000 anime divennero sul fine del primo anno 11000, e perciò l'aumento annuo fu di $\frac{1}{10}$.

321. 3.ª *Supposto che un seme di grano seminato in un terreno di media feracità non ne produca che 6, e che la raccolta d'ogni anno si adopri totalmente in nuova sementa, la quale si riproduca sempre e senza alcuna perdita nella medesima proporzione; si domanda quale diverrà dopo 10 anni.*

Abbiamo una progressione geometrica in cui

$$a=1, \quad r=6, \quad n=10,$$

e si cerca l; perciò facendo uso della formula (numero 317), avremo:

$$l=6^9=10077696.$$

322. 4.ª *Due vascelli partono nel tempo stesso da due luoghi, lontani fra loro 100 chilometri, per incontrarsi: e il primo raddoppiando, l'altro rinterzando giornalmente il viaggio, che nel primo giorno fu uguale per ambedue, si trovano dopo quattro giorni. — Si cerchi il viaggio di ciascuno, e quanto tragitto fecero nel primo e nell'ultimo giorno.*

Qui abbiamo due progressioni geometriche, di cui non sono noti che il numero $n=4$ dei termini, e la

ragione, che nella prima è $r=2$, nell'altra $r'=3$. Chiamando s, s' i viaggi cercati, a, a' gli spazi percorsi nel primo giorno, si ha:

$$s'=100-s \quad \text{e} \quad a=a'.$$

Ora la somma s dei termini della prima progressione è

$$s=\frac{lr-a}{r-1},$$

ovvero sostituendo ad r il suo valore 2,

$$s=\frac{2l-a}{1}; \ldots\ldots (1)$$

e la somma s' dei termini della seconda progressione è

$$s'=\frac{l'r'-a}{r'-1},$$

ovvero sostituendo ad r' il suo valore 3,

$$s'=\frac{3l'-a}{2} \ldots\ldots (2)$$

Ma il quarto od ultimo termine della prima progressione è

$$l=a\times 2^3=8a,$$

e della seconda

$$l'=a\times 3^3=27a;$$

sostituendo dunque questi due valori nelle equazioni (1) e (2), si ha

$$s=2\times 8a-a=15a; \quad s'=\frac{3\times 27a-a}{2}=40a.$$

Ora, se nella formula primitiva

$$s'=100-s$$

si sostituisce ad s' il suo valore $40a$, avremo

$$40a=100-s;$$

e quindi le due equazioni

$$s=15a \quad \text{e} \quad 40a=100-s,$$

da cui rilevasi facilmente:

$$s=27,272727....; \quad s'=72,727272....; \quad a=1,818181....;$$

$$l=14,545454....; \quad l'=49,090909.....$$

Problemi da risolvere.

146. Data la progressione $\div\!\div\, 3:6:\ldots\ldots$, si domanda:

1.° il 13.° termine; 2.° la somma de' 24 primi termini; 3.° la somma dei termini compresi fra il 6.° ed il 28.°

Resultato:

1.° 12288; 2.° 50331645; 3.° 402652992.

147. Trovare la media proporzionale fra i 7 primi termini della progressione $\div\!\div\, 5:15:\ldots\ldots$

Resultato: 135.

148. Sommare le progressioni decrescenti all'infinito

$$\div\!\div\, 1:\frac{1}{3}:\ldots\ldots, \quad \div\!\div\, 1:-\frac{1}{3}:\ldots\ldots$$

Resultato: 1.ª $\frac{3}{2}$; 3.ª $\frac{3}{4}$.

149. Trovare quattro termini in progressione per

quoziente, tali che la somma dei due primi sia 8 e quella de' due ultimi 72.

Resultato: Si hanno due soluzioni:

$$\begin{cases} 1.^a \div 2 : 6 : 18 \quad 54, \\ 2.^a \div -4 : 12 : -36 : 108. \end{cases}$$

150. Qual'è la progressione geometrica composta di 7 termini, della quale la somma dei 6 primi è $157\frac{1}{2}$ e quella dei 6 ultimi 315?

Resultato: $\div 2\frac{1}{2} : 5 : 10 : 20 : 40 : 80 : 160.$

151. La popolazione d'un paese nello spazio di 4 anni si è elevata da 10000 a 14641 anime. — Qual è il rapporto annuo dell'aumento?

Resultato: $\frac{1}{10}$.

152. Un tale giuoca al lotto 75 centesimi e perde; giuoca dipoi il triplo di questa somma e perde ancora, e continua così triplicando sempre fino alla dodicesima volta. — Quanto dovrebbe egli vincere allora per riavere tutto il denaro giuocato?

Resultato: Lire 199290.

153. Sessa, figlio di Daher, inventò il giuoco degli scacchi, ove il *re* non può muover passo senza il soccorso di altri pezzi. Scheram, re indiano, volendolo premiare per tale invenzione, gli domandò che cosa avrebbe desiderato. Chiesegli il Sessa un solo granello di frumento per la prima casella dello scacchiere, due per la seconda, quattro per la terza, e via di seguito

raddoppiando sempre: sicchè giunta tale progressione fino al 64.° termine, perchè 64 sono le caselle dello scacchiere, si domanda quanti granelli domandava il Sessa.

Resultato: 18446744073709551615 granelli;

quantità che non potrebbesi ottenere che seminando a solo frumento per più di 70 anni tutto il continente!

Il Wallis calcolò che con tale quantità di grano potrebbe comporsene una piramide lunga, larga ed alta nove miglia inglesi.

Logaritmi.

323. In Aritmetica abbiamo definito i Logaritmi: *Numeri in progressione per differenza, il cui primo termine è* zero, *i quali corrispondono termine a termine ad altri numeri in progressione per quoziente, il cui primo termine è l'unità, qualunque sia la ragione delle due progressioni.*

324. Il logaritmo d'un numero può anche considerarsi come *l'esponente della potenza alla quale bisogna innalzare un numero positivo costante, chiamato* **base**, *per riprodurre quel numero.* — E l'insieme dei logaritmi dedotti da una stessa base chiamasi *sistema di Logaritmi.*

Così, per esempio, sia b la base d'un sistema di logaritmi, e x l'esponente della potenza alla quale bisogna innalzare b per avere y, in modo che si abbia $y=b^x$, si dirà che x è il logaritmo d'y relativamente alla base b. E ciò significheremo scrivendo

$$x=\text{Log}\ y.$$

Proprietà dei Logaritmi.

325. I logaritmi di un medesimo sistema godono di certe proprietà molto importanti, delle quali daremo qui le dimostrazioni.

326. Teorema 1.° — *Il logaritmo del prodotto di due numeri è uguale alla somma dei logaritmi di questi numeri.*

Sieno, infatti, x e y i logaritmi dei numeri b e c in un sistema di base a; in virtù della nuova definizione avremo:

$$a^x = b,$$
$$a^y = c;$$

e, moltiplicando membro a membro queste due equazioni,

$$a^{x+y} = bc;$$

dove $x+y$ è il logaritmo di bc; ma $x = \log b$, ed $y = \log c$; dunque abbiamo

$$\log bc = \log b + \log c.$$

Questa proprietà estendesi ad un numero qualunque di fattori, e riduce la moltiplicazione ad una semplice addizione.

327. Teorema 2.° — *Il logaritmo del quoziente di due numeri è uguale alla differenza dei logaritmi di questi due numeri.*

Sieno, infatti, x e y i logaritmi di due numeri b e c nel medesimo sistema; in virtù della definizione data, avremo:

$$a^x = b,$$
$$a^y = c;$$

e, dividendo membro a membro le due equazioni,

$$a^{x-y}=\frac{b}{c};$$

dunque $x-y$ è il logaritmo di $\frac{b}{c}$, e si ha:

$$\log\frac{b}{c}=\log b-\log c,$$

come volevasi provare.

Questa proprietà dà il modo di eseguire le divisioni per via di semplici sottrazioni.

328. Teorema 3.° — *Il logaritmo della potenza* n^esima^ *d'un numero è uguale, qualunque sia* n (intero o frazionario, positivo o negativo) *al prodotto di* n *pel logaritmo di questo numero.*

Infatti, sia x il logaritmo di b; sarà

$$a^x=b;$$

onde, innalzando i due membri di questa equazione alla potenza n, avremo:

$$a^{nx}=b^n,$$

dunque nx è il logaritmo di b^n; e si ha:

$$\log b^n=n\log b,$$

come dovevasi dimostrare.

Per questo principio si semplicizza assai lo sviluppo delle potenze dei numeri.

329. Teorema 4.° — *La radice* n^esima^ *d'un numero ha per logaritmo il logaritmo di questo numero diviso per* n.

Infatti, se nell'equazione

$$a^x=b$$

si estrae la radice n^{esima} da ambo i membri, si ha:

$$a^{\frac{x}{n}}=\sqrt[n]{b};$$

dunque $\frac{x}{n}$ è il logaritmo di $\sqrt[n]{b}$; ed abbiamo:

$$\log \sqrt[n]{b}=\frac{\log b}{n},$$

come dovevasi dimostrare.

Per questo teorema anche l'estrazione delle radici di grado elevato cessa d'essere un calcolo di non facile esecuzione.

330. Teorema 5.° — *Quando la base d'un sistema è >1, i numeri maggiori dell'unità hanno i logaritmi positivi, e i numeri minori dell'unità hanno i logaritmi negativi. Avviene l'opposto se la base è <1.*

Infatti, è evidente che le potenze positive d'un numero maggiore dell'unità sono maggiori dell'unità, e che le potenze negative sono minori dell'unità, e che le potenze negative sono minori dell'unità. Avviene l'opposto per le potenze dei numeri minori dell'unità. — Dunque se $a>1$, l'equazione

$$a^x=b$$

esige che x, ovvero $\log b$, sia positivo se $b>1$, e negativo se $b<1$.

Se poi $a<1$ l'equazione

$$a^x=b$$

esige che x, ovvero $\log b$, sia negativo se $b>1$, e positivo se $b<1$.

331. Corollario. — I numeri negativi non hanno logaritmi, perchè le potenze positive o negative d'una base positiva sono tutte positive.

Identità dei logaritmi algebrici e aritmetici.

332. Facciamo ora vedere come i logaritmi, quali sono stati ora definiti (n.° 324) non differiscono da quelli considerati in Aritmetica, i quali si derivarono dal confronto dei termini di due progressioni.

Abbiasi una serie di numeri in progressione geometrica, che cominci coll'unità, per esempio,

$$\div 1 : q : q^2 : q^3 : q^4 : \ldots\ldots q^n : q^{n+1};$$

chiamando x il logaritmo di q, i logaritmi dei differenti termini di questa progressione pel teorema 3.° saranno:

$$0,\quad x,\quad 2x,\quad 3x,\quad 4x, \ldots\ldots nx,\quad (n+1)x,$$

e formeranno una progressione aritmetica, che comincia con *zero*.

Inserendo un numero k di medî tra i termini consecutivi di due progressioni, abbiamo visto in aritmetica che i termini così introdotti nella progressione per differenza sono i logaritmi dei termini corrispondenti della progressione per quoziente. Le conseguenze di questa definizione sono d' accordo con quella che abbiamo dato più avanti.

Infatti, inserendo k medi fra i termini q^n, q^{n+1} della progressione geometrica e i termini nx, $(n+1)x$ della progressione aritmetica, le rispettive ragioni formate da questi medî saranno

$$\sqrt[k+1]{q}, \qquad \frac{x}{k+1},$$

ed il p^{esimo} medio, cioè quello di posto p, sarà nella progressione per quoziente

$$q^n \times \left(\sqrt[k+1]{q}\right)^{p-1},$$

e nella progressione aritmetica

$$nx + \frac{x(p-1)}{k+1}.$$

Ma si ha

$$q^n \times \left(\sqrt[k+1]{q}\right)^{p-1} = q^{n+\frac{p-1}{k+1}},$$

$$nx + \frac{x(p-1)}{k+1} = x\left(n + \frac{p-1}{k+1}\right),$$

e poichè x è per ipotesi il logaritmo di q, il secondo di questi numeri sarà il logaritmo del primo (n.º 328).

Logaritmi volgari.

333. Il sistema di logaritmi del quale comunemente ci serviamo, è quello che ha per base 10. La disposizione e l'uso delle *tavole dei logaritmi* calcolate su questa base, furono spiegate in Aritmetica (1); diremo ora qualche cosa dei logaritmi negativi.

334. Teorema 6.º — *I logaritmi dei numeri maggiori dell'unità sono positivi e crescono come questi stessi numeri.*

(1) Vedasi il *Trattato d'Aritmetica* dello stesso autore.

Infatti, se nell'equazione

$$a^x = b$$

facciamo

$$x=0; \quad x=1; \quad x=2; \quad x=3 \ldots\ldots,$$

i valori di b, in virtù della definizione dei logaritmi divengono sempre maggiori; e si ha:

$$b=1; \quad b=a; \quad b=a^2; \quad b=a^3, \ldots\ldots$$

d'onde

$$\log 1=0; \quad \log a=1; \quad \log a^2=2; \quad \log a^3=3 \ldots\ldots$$

335. Teorema 7.° — *I logaritmi dei numeri minori dell'unità sono negativi e tanto maggiori, astrazion fatta dal segno, quanto minori sono i numeri stessi.*

Infatti, se nell'equazione

$$a^x = b$$

facciamo

$$x=0; \quad x=-1; \quad x=-2; \quad x=-3 \ldots\ldots,$$

ne risultano per b valori decrescenti:

$$b=1; \quad b=\frac{1}{a}; \quad b=\frac{1}{a^2}; \quad b=\frac{1}{a^3} \ldots\ldots;$$

d'onde

$$\log 1=0; \ \log \frac{1}{a}=-1; \ \log \frac{1}{a^2}=-2; \ \log \frac{1}{a^3}=-3 \ldots\ldots$$

336. I logaritmi volgari godono di queste due proprietà; e per conseguenza:

1.° *Il logaritmo dell'unità seguita da* n *zeri è uguale a* n.

Infatti, 1 seguito da n zeri $=10^n$; ora, in virtù della definizione dei logaritmi (n.° 324) abbiamo

$$b=10^n, \quad \text{da cui} \quad \log b=n,$$

vale a dire che il logaritmo dell'unità seguita da n zeri $=n$.

2.° *Il logaritmo di una unità decimale preceduta da* n *zeri è uguale a* —n.

Infatti, nei logaritmi volgari l'unità decimale dell'n^{esimo} ordine è uguale a

$$\frac{1}{10^n}=10^{-n};$$

dunque il logaritmo di 1 preceduto da n zeri è uguale a $-n$.

337. Da ciò può dedursi il significato delle caratteristiche negative; esse indicano che il logaritmo al quale appartengono è il logaritmo di una frazione.

Quando si opera dunque sopra logaritmi aventi caratteristica negativa, bisogna seguire una regola opposta a quella che si tiene per i logaritmi con caratteristica positiva.

Così, per la moltiplicazione, invece di fare la somma dei logaritmi, bisogna fare la sottrazione.

Infatti, moltipliplicare per una frazione significa moltiplicare per il numeratore e dividere pel denominatore, ovvero sommare il logaritmo del numeratore e sottrarre quello del denominatore; oppure sottrarre l'eccesso del logaritmo del denominatore da quello del numeratore; ora, questo eccesso è appunto il logaritmo della frazione.

338. Nel calcolo è comodo preparare il logaritmo in guisa che ne sia negativa soltanto la caratteristica; perciò si aggiungerà alla parte intera di log m un tal numero da cui si possa sottrarre log n; la differenza rappresenterà la parte decimale del logaritmo cercato,

al quale si darà per caratteristica negativa il numero intero che è stato aggiunto a $\log m$.

Esempio. — Debbasi calcolare $\log \frac{3}{47}$; avremo:

$$\log \frac{3}{47} = \log 3 - 47 = 0,47712125 - 1,67209786$$
$$= 2,47712125 - 1,67209786 - 2$$
$$= 0,80502339 - 2 = \bar{2},80502339.$$

Il segno (—) posto sopra la caratteristica indica che essa soltanto è negativa.

339. Passiamo ora ad esaminare qualche problema più facilmente solubile per mezzo dell'applicazione dei logaritmi.

Delle annualità.

340. Diconsi *Annualità* od *Annuità* certi pagamenti uguali fatti ogni anno per rimborsare od estinguere un capitale dovuto coi suoi interessi composti.

Problema. — *Un capitale* A *lire dev'esser pagato in* n *pagamenti uguali, effettuati alla fine d'ogni anno. — Qual è il valore di ciascun pagamento, se* r *è l'annua tassa per ogni unità di capitale?*

Soluzione.

Abbiamo visto in Aritmetica che il capitale A alla fine di n anni diviene $A(1+r)^n$; segue da ciò che ogni pagamento annuo è espresso dalla serie delle seguenti quantità, facendo ogni pagamento uguale ad a:

$$a(1+r)^{n-1},\quad a(1+r)^{n-2},\quad a(1+r)^{n-3} \ldots\ldots + a,$$

cosicchè coll'ultimo pagamento si è raggiunto il capitale A; a quest'epoca il capitale A è divenuto

$$A(1+r)^n;$$

ora, la somma delle n prime espressioni deve ugualiare l'ultima, cioè

$$a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+a(1+r)^{n-3}...+a=A(1+r)^n.$$

Ma a questa equazione può darsi la forma

$$a[(1+r)^{n-1}+(1+r)^{n-2}+(1+r)^{n-3}....+....+1)]$$
$$=A(1+r)^n;$$

oppure

$$a[1+(1+r)^1+(1+r)^2+(1+r)^3)+.....+(1+r)^{n-1}]$$
$$=A(1+r)^n;$$

da ciò si deduce che la somma da pagarsi annualmente, ovvero la quantità cercata a viene a subire la moltiplicazione per la somma dei termini d'una progressione geometrica che ha per primo termine 1, per ragione $1+r$, e per ultimo termine

$$(1+r)^{n-1};$$

ossia per

$$\frac{(1+r)^{n-1}\times(1+r)-1}{(1+r)-1}=\frac{(1+r)^n-1}{r}.$$

Così l'equazione ultima diventa

$$a\frac{(1+r)^n-1}{r}=A(1+r)^n;$$

da cui

$$a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1};$$

e facendo uso dei logaritmi, si ha:

$$\log a=\log A+\log r+n\log(1+r)-\log[(1+r)^n-1].$$

341. Questo problema può considerarsi sotto altri tre rapporti come gl'interessi composti, prendendo per incognita A, o n, o r; ora questo problema non è altra cosa che il calcolo delle annualità; non resta che cambiarne l'enunciato.

Esempio. — *Determinare la somma da pagarsi annualmente per 10 anni, onde estinguere un debito il cui valore attuale è di L. 8000, supponendo che il primo pagamento debba farsi dopo un anno, e che la tassa dell'interesse sia del 6 per 100 o di 0,06 per ogni lira all'anno.*

Applicando la formula precedente, avremo:

$$a=\frac{8000.0,06.(1,06)^{10}}{(1,06)^{10}-1}, \quad \text{ovvero} \quad a=\frac{480.(1,06)^{10}}{(1,06)^{10}-1};$$

d'onde

$$\log a=\log 480+10.\log 1,06-\log [(1,06)^{10}-1].$$

Operazione.

Calcolo di $(1,06)^{10}$.

$$\log 1,06=0,02530587$$
$$10.\log 1,06=0,2530587$$
$$(1,06)^{10}=1,79085$$

Calcolo di a.

$$\log 480 \quad =2,6812412$$
$$\log 1,79085=0,2530587$$
$$-\log 0,79085=0,1019059$$
$$\log a=3,0362058$$
$$a=\text{Lire } 1086,40.$$

Problemi.

154. Si vuole estinguere un debito di L. 3671,58 in 8 anni, calcolando gl' interessi al 5 per 100. — Quale annualità dovrà sborsarsi?

Resultato: Lire 568.

155. Un comune prese ad imprestito la somma di L. 100000 per la costruzione d'un ospedale, coll' obbligo di soddisfarvi pagando una somma uguale ogni anno per lo spazio di 12 anni. — Trovare il valore dell'annualità, sapendo che l'interesse erasi pattuito al 5 per 100.

Resultato: Lire 11282,70.

156. Si vuol sapere quanti anni saranno necessari per estinguere, mediante un' annualità di L. 5771,83, un debito di L. 20000, il quale co' suoi interessi composti al 6 per 100 uguaglia L. 25249,54.

Resultato: Anni 4.

157. Si domanda il valore attuale di un' annualità di L. 570 pagabile in 12 anni, supponendo che la tassa dell' interesse sia del 6 per 100 all' anno, e che il primo pagamento debba farsi dopo un anno.

Resultato: Lire 4778,38.

Risoluzione delle equazioni esponenziali col mezzo dei logaritmi.

342. Riprendiamo l'equazione generale (n.° 239)

$$a^x=b.$$

Per risolvere questa equazione esponenziale di *prim'ordine*, prendiamo i logaritmi dell'uno e dell'altro membro, e si avrà

$$x\log a=\log b,$$

quindi

$$x=\frac{\log b}{\log a}.$$

Tale è il valore dell' incognita x, ed il calcolo non offre difficoltà, quando a e b sono ambedue >1.

Esempio 1.° — Abbiasi

$$7^x=1254;$$

sarà

$$x=\frac{\log 1254}{\log 7}=\frac{3,09830}{0,84510}.$$

Facendo la divisione ordinaria, si troverà

$$x=3,66619;$$

e ricorrendo ai logaritmi, avremo:

$$x=3,66617.$$

343. Quando a o b, od ambedue sono <1, si riduce il problema al caso precedente, trasformando l'equazione $a^x=b$ in un'altra, in cui le due quantità date sieno >1.

1.° Supponiamo $a>1$ e $b<1$; è evidente che in tal caso x non potrà esser positivo; facciamo

$$x=-x'$$

ed avremo

$$a^{-x'}=b,$$

la qual' equazione per nota convenzione relativa agli esponenti negativi (n.° 33) diviene

$$\frac{1}{a^{x'}}=b, \quad \text{da cui} \quad a^{x'}=\frac{1}{b},$$

nella quale a e $\frac{1}{b}$ sono >1. Da questa equazione ricavasi

$$x'=\frac{\log\frac{1}{b}}{\log a},$$

ed il valore trovato d'x' col segno — sarà quello d'x.

Esempio 2.° — Abbiasi

$$3^x=0,462;$$

sarà

$$x'=\frac{\log\frac{1}{0,462}}{\log 3}=\frac{0,33536}{0,47712};$$

quindi

$$x'=0,702884, \quad \text{e} \quad x=-0,702884.$$

2.° Supponiamo $a<1$ e $b>1$; anche in questo caso x è necessariamente negativo. Facendo dunque

$$x=-x',$$

l'equazione può porsi sotto la forma

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x'}=b;$$

e applicando i logaritmi, avremo

$$x' = \frac{\log b}{\log \frac{1}{a}};$$

per conseguenza il valore trovato per x' preso col segno —, sarà quello d'x.

Esempio 3.° — Abbiasi

$$0,39^x = 5,$$

ne dedurremo

$$x' = \frac{\log 5}{\log \frac{1}{0,39}} = \frac{0,69897}{0,40894};$$

quindi

$$x' = 1,70922 \quad \text{e} \quad x = -1,70922.$$

3.° Sopponiamo finalmente $a < 1$, $b < 1$, l'equazione $a^x = b$ potrà scriversi

$$\frac{1}{a^x} = \frac{1}{b}, \quad \text{ovvero} \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{b},$$

ove

$$\frac{1}{a} \quad \text{e} \quad \frac{1}{b}$$

sono quantità maggiori di 1; avremo dunque direttamente il valore d'x dalla formula

$$x = \frac{\log \frac{1}{b}}{\log \frac{1}{a}}.$$

Esempio 4.° — Abbiasi

$$0,075^x = 0,6478;$$

avremo

$$x=\frac{\log\frac{1}{0,6478}}{\log\frac{1}{0,075}}=\frac{0,18856}{1,12494}=0,167615.$$

344. Debbasi ora ricavare il valore d'x dall' equazione esponenziale di *second' ordine*

$$a^{b^x}=c,$$

nella quale il primo membro indica che il numero a è inalzato alla potenza indicata da b^x.

Prendendo i logaritmi e riguardando b^x come l'esponente di a, questa equazione diviene

$$b^x\log a=\log c,\quad \text{ovvero}\quad b^x=\frac{\log c}{\log a}.$$

Prendendo nuovamente i logaritmi dei due membri di questa equazione, si ha

$$x\log b=\log\log c-\log\log a;$$

onde

$$x=\frac{\log\log c-\log\log a}{\log b}.$$

345. Risolvendo l'equazione esponenziale di *terz'ordine*

$$a^{b^{c^x}}=d,$$

come le precedenti, se ne dedurrà

$$x=\frac{\log(\log\log d-\log\log a)-\log\log b}{\log c}.$$

Quelle degli ordini successivi si risolvono collo stesso metodo.

316. Se fosse domandato di risolvere un'equazione della forma

$$a^{mx+n}=b^{px+q},$$

basterebbe prendere i logaritmi dei due membri, e si avrebbe

$$(mx+n)\log a=(px+q)\log b,$$

equazione di primo grado in x, dalla quale deducesi facilmente

$$x=\frac{q\log b-n\log a}{m\log a-p\log b}.$$

317. Prendiamo per ultimo esempio l'equazione

$$ma^x+na^{-x}=k;$$

moltiplicando primieramente per a^x ed osservando che

$$a^x\,.\,a^{-x}=a^0=1,$$

si ha:

$$m(a^x)^2+n=ka^x;$$

questa nuova equazione è di secondo grado considerando a^x come incognita; e si avrà

$$a^x=\frac{k\pm\sqrt{k^2-4mn}}{2m};$$

indi prendendo i logaritmi, e dividendo per log a,

$$x=\frac{\log(k\pm\sqrt{k^2-4mn})-\log m-\log 2}{\log a}.$$

ESERCIZI.

XCVI. Risolvere le seguenti equazioni:

$$12^x=1350.$$

Resultato: $x=2,89695\ldots\ldots$

$$4^x=0,321.$$

Resultato: $x=-0,84128\ldots\ldots$

$$(0,35)^x=4.$$

Resultato: $x=-1,32048\ldots\ldots$

$$(0,045)^x=0,1234.$$

Resultato: $x=0,674705\ldots\ldots$

$$43^x=17.$$

Resultato: $x=0,753\ldots\ldots$

$$19^x=325.$$

Resultato: $x=1,964\ldots\ldots$

$$4^{3^x}=57.$$

Resultato: $x=\dfrac{\log\log 57-\log\log 4}{\log 3}.$

$$3^{2^x}-5\,.\,3^x=6,$$

Resultato: $x=1$, e $x=0,63095.$

Soluzione dei quattro ultimi problemi relativi alle progressioni per quoziente.

348. Problema 7.° — *Determinare* a *ed* n, *conoscendo* l, r *ed* s.

Riprendiamo le due formule del n.° 301 e 302:

$$(1)\ldots\ldots l=ar^{n-1},\quad (2)\ldots\ldots s(r-1)=lr-a.$$

Dalla (2) ricaveremo

$$a=lr-s(r-1);$$

prendendo poi i logaritmi della (1), e trasportando, avremo:

$$\log a+(n-1)\log r=\log l,$$

da cui

$$n=1+\frac{\log l-\log a}{\log r}=1+\frac{\log l-\log (lr-sr+s)}{\log r}.$$

349. Problema 8°. — *Determinare* l *ed* n, *conoscendo* a, r *ed* s.

L'equazione (2) dà subito il valore di l; sostituendolo nella (1) e prendendo i logaritmi, avremo una nuova equazione, da cui potremo dedurre il valore di n; si troverà così

$$l=\frac{sr-s+a}{r},\quad n=\frac{\log (sr-s+a)-\log a}{\log r}.$$

350. Problema 9.° — *Determinare* n *ed* r, *conoscendo* a, l *ed* s.

Dall'equazione (2) si deduce

$$r=\frac{s-a}{s-l},$$

e per conseguenza

$$\log r=\log (s-a)-\log (s-l);$$

cambiando di posto i membri dell'equazione (1) e prendendo i logaritmi, si ha:

$$\log a+(n-1)\log r=\log l,$$

da cui

$$n=1+\frac{\log l-\log a}{\log r}=1+\frac{\log l-\log a}{\log (s-a)-\log (s-l)}.$$

351. Problema 10.° — *Determinare* n *ed* s, *conoscendo* a, l *ed* r.

Dall'equazione (2) si ricava

$$s=\frac{lr-a}{r-1};$$

prendendo i logaritmi dei due membri dell'equazione (1), si ottiene:

$$\log l - \log a + (n-1)\log r,$$

da cui

$$n=1+\frac{\log l - \log a}{\log r}.$$

Problemi.

158. Si supponga che la popolazione aumenti annualmente in progressione per quoziente; si domanda dopo quanto tempo un paese avrà c abitanti, sapendo che attualmente ne ha b e che n anni sono ne aveva a.

Resultato: $x=\frac{n.(\log c - \log b)}{\log b - \log a}.$

159. Un tale ha una botte di a litri di vino; egli ne toglie ogni giorno un litro, sostituendovi un litro d'acqua; si domanda dopo quanti giorni la botte non conterrà più che b litri di vino.

Resultato: $x=\frac{\log a - \log b}{\log a - \log(a-1)}.$

160. Due vasi contengono il 1.° a litri di vino, il 2.° a litri d'acqua; si hanno due misure d'un litro ciascuna che s'immergono contemporaneamente nell'uno e nell'altro vaso per empirle; ciò fatto si versa

in ciascun vaso il liquido estratto dall' altro; quante operazioni di tal genere bisognerà fare affinchè il 1.° vaso contenga $a : m$ litri d'acqua?

Resultato: $x=\frac{\log m-\log (m-2)}{\log a-\log (a-2)}$.

Analisi indeterminata di primo grado.

352. L'oggetto dell'*analisi indeterminata* di primo grado è di risolvere in numeri interi e positivi i problemi, che conducono ad un numero di equazioni di primo grado minore di quello delle incognite. — Tale è il seguente:

353. Problema. — *Trovare due numeri, la cui somma sia quadrupla della loro differenza.*

È evidente che rappresentando i due numeri con x e y, la condizione enunciata nel problema sarà espressa dall' equazione

$$x+y=4(x-y).$$

E perchè l'enunciato del problema non presenta altra condizione da soddisfare, non si può formare altra equazione fra le due incognite.

La precedente si riduce a

$$5y=3x.$$

Se vuolsi conservare al calcolo tutta la sua generalità, non havvi altro mezzo per risolvere questa equazione se non quello di dare un valore arbitrario ad una delle incognite, e determinare dipoi il valore dell' altra.

Attribuendo indefinitamente ad x ed y valori positivi, negativi o frazionari, è chiaro che questo problema e tutti quelli che lo somigliano ammettono una infinità di soluzioni; ma se non voglionsi che soluzioni in numeri interi positivi, il numero ne è ordinariamente limitato, ed è facile in generale di determinarlo.

Sia l'equazione

$$ax-by=\pm c,$$

la quale contiene la soluzione di qualunque problema indeterminato di primo grado. Suppongo i numeri a e b primi fra loro: perchè se avessero un fattor comune, è evidente che l'equazione non potrebbe sussistere, a meno che c non fosse divisibile per questo fattore: ed in tal caso si farebbe sparire per mezzo della divisione.

L'equazione essendo così preparata, dimostreremo che conoscendo i più piccoli valori d'x e y, i quali sodisfano alla equazione in numeri interi, gli altri valori saranno in progressione aritmetica, la cui ragione sarà data pei valori d'x dal coefficiente d'y, e pei valori d'y dal coefficiente d'x.

Infatti, supponiamo che p e q sieno i più piccoli valori d'x e d'y, i quali sodisfano all'equazione; avremo l'equazione generale

$$ax=by\pm c,$$

e l'equazione particolare

$$ap=bq\pm c.$$

Sottraendo questa dalla prima, si eliminerà c, ed avremo

$$ax-ap=by-bq,$$

ovvero

$$\frac{a}{b}=\frac{y-q}{x-p}.$$

Ora, a e b sono primi fra loro; dunque la prima frazione è irriducibile: ed è chiaro che si avrà la soluzione più semplice, prendendo

$$y-q=a, \quad \text{e} \quad x-p=b.$$

Ma poichè il valore d'una frazione non cambia moltiplicandone i due termini per uno stesso numero, è evidente che si potrà prendere parimente

$$y-q=na, \quad \text{e} \quad x-p=nb,$$

o

$$y=q+na, \quad \text{e} \quad x=p+nb,$$

essendo n un numero qualunque, che bisognerà supporre intero, affinchè x e y sieno interi.

Dando ad n tutti i valori successivi dei numeri naturali, cominciando da *zero*, avremo i valori seguenti d'x e y:

$$x=p, \quad p+b, \quad p+2b, \quad p+3b, \quad p+4b \ldots\ldots p+nb;$$
$$y=q, \quad q+a, \quad q+2a, \quad q+3a, \quad q+4a \ldots\ldots q+na.$$

Ora, queste differenti soluzioni formano delle progressioni aritmetiche, la cui ragione è b per la prima e a per la seconda; non resta dunque che determinare p e q, ciò che forma l'oggetto dei problemi seguenti.

354. Problema 1.° — Trovare i minori valori possibili interi e positivi d'x e y, che sodisfano all'equazione

$$47x=68y+13.$$

Soluzione.

Porremo primieramente l'equazione sotto la forma

$$x=\frac{68y+13}{47} \ldots\ldots (1)$$

eseguendo la divisione fino a che si può

$$x=y+\frac{21y+13}{47}.$$

Per sodisfare alla condizione che x e y sieno interi, bisogna necessariamente che

$$\frac{21y+13}{47}$$

sia un numero intero; perchè un intero più una frazione non darebbero mai un numero intero.

Rappresentiamo quest'ultimo termine colla lettera E, la quale indicherà una quantità indeterminata, ma sottoposta alla condizione che sia un numero intero: si avrà dunque l'equazione:

$$\frac{21y+13}{47}=E,$$

ovvero

$$21y=47E-13$$

$$y=2E+\frac{5E-13}{21} \ldots\ldots (2)$$

Essendo y un numero intero, è necessario che l'ultima espressione sia un intero, che indicheremo con E', e si avrà:

$$\frac{5E-13}{21}=E',$$

e

$$5E=21E'+13;$$

dunque

$$E=4E'+2+\frac{E'+3}{5} \ldots\ldots (3)$$

Affinchè E sia un numero intero, bisogna che

$$\frac{E'+3}{5}$$

sia pure un intero; indicandolo con E'', si avrà:

$$E'+3=5E'',$$

ed

$$E'=5E''-3 \ldots\ldots (4)$$

Ora, in quest' ultima equazione si scorge facilmente che il minor valore che devesi dare ad E'', perchè E' sia un intero positivo è 1. In questo caso $E'=2$; risalendo all' equazione (3), $E=11$; l'equazione (2) dà $y=24$; finalmente l'equazione (1) dà $x=35$; dunque 24 e 35 sono i due valori minori possibili che possano darsi ad x e y per sodisfare all'equazione proposta.

È utile osservare che per trasformare l' equazione data in un'altra nella quale una delle incognite non abbia che l'unità per coefficiente, abbiamo diviso nell' equazione (1) 68 per 47; il quoziente è 1 col resto 21; nell'equazione (2) abbiamo diviso 47 per 21; il quoziente è 2 col resto 5; nell' equazione (3) abbiamo diviso 21 per 5; il quoziente è 4 col resto 1; ora è chiaro che questo metodo non differisce da quello che si usa per trovare il massimo comune divisore fra due numeri dati; e poichè, per la natura del problema, i due numeri debbono esser primi fra loro, è evidente che non avranno altro comun divisore che l' unità.

355. Problema 2.° — Trovare i minori valori possibili interi e positivi d'x e y, che sodisfano all'equazione

$$835x-2866y-7.$$

Soluzione.

Operando come nel problema precedente si ha:

$$x=\frac{2866y-7}{835}=3y+\frac{361y-7}{835}.$$

Sia questa espressione frazionaria uguale ad un intero E, avremo

$$y=\frac{835E+7}{361}=2E+\frac{113E+7}{361}.$$

Quest' ultima espressione è uguale ed E'; dunque

$$E=\frac{361E'-7}{113}=3E'+\frac{22E'-7}{113}.$$

Sia quest' ultima espressione frazionaria uguale ad E''; troveremo:

$$E'=\frac{113E''+7}{22}=5E''+\frac{3E''+7}{22}.$$

Per la stessa ragione

$$E''=\frac{22E'''-7}{3}=7E'''-2+\frac{E'''-1}{3}.$$

Si vede evidentemente che supppnendo

$$E'''=1,$$

l'ultima frazione diviene *zero*, ed

$$E''=5;\quad E'=26;\quad E=83;\quad y=192;\quad x=659;$$

dunque 192 e 659 sono i due minori valori possibili d'y e d'x, i quali sodisfano all'equazione data.

355. Abbiamo già osservato che questo metodo per trovare i minori valori possibili d'y e d'x è uguale a quello usato per trovare il massimo comun divisore fra i due coefficienti d'x e d'y; un tal metodo ha molta analogìa con quello delle frazioni continue. Possiamo dunque dedurre la soluzione generale delle equazioni indeterminate di primo grado dalle proprietà conosciute di questa specie di frazioni.

Infatti, sia l'equazione generale

$$cx=by\pm c,$$

ovvero

$$ax-by=\pm c.$$

Facciamo

$$x=pc, \quad y=qc,$$

e l'equazione diverrà

$$ap-bq=\pm 1;$$

di maniera che, sapendo risolvere questa, saremo in grado di risolvere anche la prima. Ora, se si ha la frazione ordinaria $\frac{a}{b}$ ridotta alla sua più semplice espressione, e se dopo averla trasformata in frazione continua, si rappresentano le frazioni successive, che dànno per approssimazione il valore della frazione continua, con

$$\frac{d}{e}, \quad \frac{n}{m}, \quad \frac{q}{p}, \quad \frac{a}{b},$$

si ha in generale

$$ap-bq=\pm 1;$$

dunque nell'equazione da risolversi si possono riguardare p e q come i due termini della penultima frazione approssimativa, che si otterrebbe riducendo $\frac{a}{b}$ in frazione continua, p e q essendo determinati; moltiplicando l'equazione per c, si avrà

$$acp-bcq=\pm c.$$

Questa equazione essendo sottratta dalla proposta

$$ax-by=\pm c,$$

avremo:

$$a(x-pc)-b(y-qc)=0,$$

ovvero
$$\frac{na}{nb}=\frac{y-qc}{x-pc},$$

la quale darà immediatamente

$$y=na+qc, \quad x=nb+pc,$$

essendo n un numero intero positivo o negativo.

356. Problema 3.° — *Una persona deve ad un'altra Lire 31, e non ha per pagarla che monete da Lire 5; e questa non può renderle che scudi da L. 6. — Si domanda come potranno effettuare il pagamento.*

Soluzione.

La prima persona darà un numero incognito di monete da L. 5, e l'altra le renderà un numero incognito di scudi da L. 6. Sia x il numero delle monete da L. 5 e y il numero degli scudi; in tal modo la prima avrà pagato L. 31; dunque la traduzione algebrica del problema sarà

$$5x-6y=31.$$

Paragonando questa equazione colla formula generale, si avrà

$$a=5,\quad b=6 \quad \text{e} \quad c=31.$$

Determineremo p e q per mezzo dell'equazione

$$ap-bq=-1,$$

e si avrà

$$p=1,\quad q=1;$$

dunque si ha in generale

$$x=6n-31;\quad y=5n-31.$$

Il minore valore che possa darsi ad n affinchè x e y sieno numeri interi e positivi è $n=7$; allora si ha

$$y=4 \quad \text{e} \quad x=11;$$

dunque si effettuerà il pagamento dando 11 monete da 5 lire e ricevendo in cambio 4 scudi da lire 6.

Gli altri valori d'x e d'y che soddisfano all'equazione son dati da due progressioni aritmetiche, che vanno all'infinito, e la cui ragione è 6 pei valori d'x e 5 per quelli d'y.

I valori d'x saranno

11, 17, 23, 29, 35 . . . . . ;

quelli d'y

4, 9, 14, 19, 24 . . . . .

357. La teoria de' problemi indeterminati di primo grado ci fa conoscere che si può sodisfare a tale specie di problemi in un numero infinito di maniere. Ordinariamente si cercano le soluzioni in numeri interi e positivi, ed in tal caso il numero delle soluzion è limitato. Per trovare tutte le soluzioni in numeri interi e positivi, basta conoscerne uno, perchè tutti

gli altri sono dati da progressioni aritmetiche, la cui ragione è conosciuta. Finalmente il metodo usato per trovare una soluzione, si riduce a sodisfare ad un' equazione ausiliaria, data dalla teorìa delle frazioni continue.

ESERCIZI

XCVII. Cercare i valori interi e positivi delle incognite nelle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} 5x-2y+4z=13, \\ 5x+7y-3z=10. \end{cases}$$

Resultato: $x=1$; $y=2$; $z=3$.

$$5x+8y+7z=50.$$

Resultato: $x=7,4,1$; $y=1,2,3$; $z=1,2,3$.

$$3x+5y=31.$$

Resultato: $x=7,\ 2$; $y=2,\ 5$.

$$\begin{cases} 6x-7y+2z=21, \\ 8x+5y+6z=49. \end{cases}$$

Resultato: $x=4$; $y=1$; $z=2$.

Problemi.

161. Dividere il numero 1591 in due parti rispettivamente divisibili l'una per 23 e l'altra per 34.

Resultato: $x=1081, 299$; $y=510, 1292$.

162. Quali sono i numeri che, divisi per 3, dànno per resto 1, e divisi per 5, dànno per resto 2?

Resultato: 22, 37, 52, ...

163. Trovare un numero divisibile per 9, e che diviso per 11 dia 8 per resto.

Resultato: 63, 162, 261, 360, 459, 558, 657.....

164. Dividere 142 in due parti divisibili esattamente l'una per 9 e l'altra per 14.

Resultato: 72, 70.

165. In quanti modi si può comporre una somma di L. 60, ricevendo *pezze* da L. 5, e rendendo altre da L. 1,50?

Resultato: $x=15$, 18, 21.....; $y=10$, 20, 30.....

166. Quali sono i numeri che, divisi per 3, lasciano per resto 1, e che, divisi per 5, lasciano per resto 2?

Resultato: 7, 22, 37, 52, ecc., $15n+7$.

167. Trovare due numeri tali, che moltiplicando il primo per 17, e il secondo per 26, il primo prodotto superi il secondo di 7.

Resultato: 5 e 3, o 31 e 20, o 57 e 37, ecc.

168. Dividere 142 in due parti, l'una divisibile per 9 e l'altra per 14.

Resultato: 72 e 70.

169. Un certo numero d'uomini e di donne spendono nsieme Lire 365. Un uomo spende 7 lire, e una donna 4 lire. — Quanti erano gli uomini e quante le donne?

Resultato: Uomini $51-4n$; donne $2+7n$; 11 soluzioni.

170. Trovare due numeri interi, la cui somma, aggiunta al loro prodotto, sia eguale a 139.

Resultato: 1 e 69, 3 e 34, 4 e 27, 6 e 19, 9 e 13.

FINE.

INDICE